

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Έστω τυχαίο δείγμα n παρατηρήσεων από πληθυσμό του οποίου η κατανομή εξαρτάται από μία ή περισσότερες παραμέτρους, π.χ. μ .

Στην αρχή διατυπώνουμε μια υπόθεση ως προς την άγνωστη τιμή της παραμέτρου, έστω μ_0 .

Στη συνέχεια ελέγχουμε την υπόθεση συγκρίνοντας την τιμή της παραμέτρου που εκτιμήσαμε από το δείγμα με εκείνη που έχουμε υποθέσει ότι έχει.

Η διαφορά που υπάρχει μεταξύ των τιμών μπορεί να είναι
α) φαινομενική ή β) πραγματική

Η διαδικασία με βάση την οποία θα απορρίψουμε ή όχι την υπόθεση μ_0 που έχουμε κάνει για την μ , ονομάζεται

Στατιστικός Έλεγχος Υποθέσεων

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

➤ **Παράδειγμα 1.** Έστω δύο υποθέσεις για την παράμετρο θ ενός πληθυσμού

α) $H_0 : \theta = 1$ (απλή υπόθεση)

β) $H_0 : \theta > 1$ (σύνθετη υπόθεση)

➤ **Παράδειγμα 2.** Έστω μία υπόθεση για την παράμετρο θ ενός πληθυσμού

$$H_0 : \theta = 1$$

Η υπόθεση σύμφωνα με την οποία η θ έχει διαφορετική τιμή ονομάζεται εναλλακτική υπόθεση. Δηλαδή,

$$H_0 : \theta = 1, \text{ κατά της } H_0 : \theta \neq 1$$

Επίπεδο Σημαντικότητας

Στην πράξη για να ελέγξουμε μία υπόθεση ορίζουμε μία διαδικασία ελέγχου και μία κρίσιμη περιοχή τιμών C .

Δεν απορρίπτεται η H_0 αν $\{x_1, x_1, \dots\} \notin C$

Απορρίπτεται η H_0 αν $\{x_1, x_1, \dots\} \in C$

Απαιτούμε η πιθανότητα, η μέτρηση του δείγματος μας να πέσει στην κρίσιμη περιοχή, να είναι μικρότερη ή ίση με μία τιμή α , ή διαφορετικά να ελεγχθεί η υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α .

- Σφάλμα τύπου I: Όταν ο έλεγχος οδηγεί στην **απόρριψη** της υπόθεσης όταν αυτή είναι **αληθινή**
- Σφάλμα τύπου II: Όταν ο έλεγχος οδηγεί στην **αποδοχή** της υπόθεσης όταν αυτή **δεν είναι αληθινή**

Μονόπλευρος Έλεγχος

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \text{ κατά } H_1 : \mu > \mu_0$$

(Διασπορά γνωστή, δείγμα μεγάλο ή μικρό)

➤ Κρίσιμη Περιοχή $C = \left(\{x_1, x_1, \dots\} : \bar{X} - \mu_0 > c \right)$

➤ Έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας α $P(\bar{X} - \mu_0 > c) = \alpha$

ή ισοδύναμα $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{c}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = \alpha$

➤ Ορίζοντας, $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow N(0,1) \Rightarrow P\left(Z > \frac{c}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = \alpha$

ή ισοδύναμα $P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad z_\alpha = \frac{c}{\sigma / \sqrt{n}}$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Μονόπλευρος Έλεγχος $H_0 : \mu \leq \mu_0$, κατά $H_1 : \mu > \mu_0$

(Διασπορά γνωστή, δείγμα μεγάλο ή μικρό)

Συνεπώς απορρίπτεται η H_0 όταν $\bar{X} - \mu_0 > c$. Δηλαδή,

$$\bar{X} - \mu_0 > z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_a, \quad z_a = \frac{c}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Ή τελικά όταν $Z > z_a$

➤ Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας α , το κριτήριο είναι

Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z > z_a$

Δεν απορρίπτουμε την H_0 αν $Z \leq z_a$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Μονόπλευρος Έλεγχος $H_0 : \mu \leq \mu_0$, κατά $H_1 : \mu > \mu_0$

(Διασπορά άγνωστη, δείγμα μεγάλο)

Το κριτήριο παραμένει το ίδιο με την αντικατάσταση $\sigma \rightarrow s$

Σε επίπεδο σημαντικότητας α , το κριτήριο είναι

Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z > z_\alpha$

Δεν απορρίπτουμε την H_0 αν $Z \leq z_\alpha$

Παράδειγμα: Ερευνητής ενδιαφέρεται για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού ο οποίος έχει τυπική απόκλιση 3. Από ένα δείγμα του πληθυσμού μεγέθους $n=36$, προκύπτει δειγματικός μέσος 17. Ο ερευνητής θέλει να ελέγξει την μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu \leq 16$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$

Μονόπλευρος Έλεγχος $H_0 : \mu \geq \mu_0$, κατά $H_1 : \mu < \mu_0$

(Διασπορά γνωστή, δείγμα μεγάλο ή μικρό)

Σε επίπεδο σημαντικότητας α , το κριτήριο είναι

Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z < -z_\alpha$

Δεν απορρίπτουμε την H_0 αν $Z \geq z_\alpha$

Παρατήρηση Αν η διασπορά του πληθυσμού είναι άγνωστη αλλά το δείγμα είναι μεγάλο τότε το κριτήριο παραμένει το ίδιο κάνοντας την αντικατάσταση

$$\sigma \rightarrow s$$

Παράδειγμα Σε ένα δείγμα 49 παρατηρήσεων παράδοσης μιας αλυσίδας fast food βρέθηκε ότι ο μέσος χρόνος παράδοσης είναι 23 λεπτά, με τυπική απόκλιση 6 λεπτά. Μπορεί να συμπεράνει κανείς σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 ότι ο μέσος χρόνος παράδοσης είναι μεγαλύτερος από 26 λεπτά;