

# ΜΕΤΡΑ ΚΥΜΑΝΣΗΣ

Είναι μέτρα της μεταβλητότητας (variability), δηλαδή της διαφοροποίησης των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής μεταξύ των στατιστικών μονάδων

- **Εύρος**
- **Μέση Απόκλιση**
- **Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση**
- **Συντελεστής Μεταβλητότητας**
- **Μέση Διαφορά**
- **Συντελεστής Συγκέντρωσης του Gini**

## Εύρος

**Μέτρο της απόστασης μεταξύ αντιπροσωπευτικών τιμών της μεταβλητής**

- **Εύρος τιμών**

$$x_{\max} - x_{\min}$$

- **Ενδοτεταρτημορικό εύρος**

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

## Μέση Απόκλιση

Ο αριθμητικός μέσος των απολύτων τιμών των αποκλίσεων των τιμών των δεδομένων από τον αριθμητικό τους μέσο

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \mu|}{N} \quad \acute{\eta} \quad a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

### Παρατήρηση:

Αν στον ορισμό αντικαταστήσουμε τον μέσο με την διάμεσο

$$A'_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - M|}{N} \quad \acute{\eta} \quad a'_1 = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m|}{n}$$

## Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση

Ο αριθμητικός μέσος των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών των δεδομένων από τον αριθμητικό τους μέσο

- Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση Πληθυσμού ( $\sigma^2$  ή  $V(X)$ )

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} \quad \text{και} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

- Στην πράξη

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)^2 = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}{N^2}$$

## Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση

- Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση Δείγματος

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad \text{και} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Στην πράξη

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

## Ιδιότητες της Διακύμανσης

- Η Διακύμανση μιας σταθερής μεταβλητής είναι 0

$$\text{εάν } x_1 = x_2 = \dots = x_N = a \Rightarrow \sigma^2 = 0$$

- Εάν  $Y = aX + b \Rightarrow V(Y) = b^2 V(X) \quad a, b \in R$

- Έστω πληθυσμός  $\Pi$  μεγέθους  $N$  που αποτελείται από  $k$  διακριτούς μεταξύ τους υποπληθυσμούς  $\Pi_i (i = 1, 2, \dots, k)$  μεγεθών  $N_1, N_2, \dots, N_k$  έτσι ώστε  $N = \sum N_i$ . Αν  $\mu, \sigma^2$  ο μέσος και η διακύμανση του πληθυσμού  $\Pi$  αντίστοιχα και  $\mu_i, \sigma_i^2$  ο μέσος και η διακύμανση του  $i$ -οστού πληθυσμού αντίστοιχα, τότε η διακύμανση του πληθυσμού  $\Pi$  δίδεται από την έκφραση

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i \sigma_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i (\mu_i - \mu)^2$$

## Εφαρμογή: Τυποποιημένη τιμή

- Έστω η μεταβλητή  $X$  με τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_N$  με  $\mu, \sigma^2$  ο μέσος και η διακύμανση του πληθυσμού αντίστοιχα. Η τυποποιημένη μεταβλητή  $Z$  ορίζεται ως εξής

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Από τον ορισμό προκύπτει

$$\mu_z = \frac{1}{\sigma} \mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1$$

Υπόδειξη:  $Z = \frac{1}{\sigma} X - \mu$

## Συντελεστής Μεταβλητότητας

Ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τον αριθμητικό μέσο

- Συντελεστής μεταβλητότητας Πληθυσμού και Δείγματος

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} (\times 100) \quad \text{και} \quad cv = \frac{s}{\bar{x}} (\times 100)$$

- Στην πράξη

$$CV^2(X) = \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2}{N}}{\mu_X^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i}{\mu_X} - 1 \right)^2$$



## Μέση Διαφορά και Συντελεστής Gini

Ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τον αριθμητικό μέσο

➤ Μέση Διαφορά

$$\Delta = \frac{2}{N(N-1)} \sum_i \sum_j (x_i - x_j)^2$$

➤ Συντελεστής μεταβλητότητας του Gini

$$G = \frac{\Delta}{2\mu}, \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

# Εκτίμηση της Μεταβλητότητας στην περίπτωση Ομαδοποιημένων Δεδομένων

## ➤ Μέση Απόκλιση

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |w_i - \mu|}{N} \quad \text{ή} \quad a_1 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |w_i - \bar{x}|}{n}$$

## ➤ Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (w_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i w_i^2}{N} - \mu^2 \quad \text{και} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i w_i^2}{N} - \mu^2}$$