Φοίβος Μυλωνάς
fmylonas@ionio.gr

«Τεχνολογίες Ευφυούς Διαχείρισης Ανθρωπιστικών Δεδομένων»

Βασικές αρχές ασάφειας & αβεβαιότητας

Φοίβος Μυλωνάς, **fmylonas@ionio.gr**

Περιεχόμενα Α’ μέρους

- Αβέβαιη Γνώση
- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Ο Νόμος του Bayes
- Συντελεστές Βεβαιότητας
- Δίκτυα Πιθανοτήτων
- Δίκτυα Συμπερασμού
- Προσέγγιση Dempster-Shafer
- Κανόνας Dempster-Shafer
- Παράδειγμα

Αβέβαιη Γνώση

- Κυριότερες πηγές αβεβαιότητας:
  - **Ανακριβή δεδομένα (*imprecise data).***
  - **Ελλιπή δεδομένα (*incomplete data*)**
  - **Υποκειμενικότητα ή/και ελλείψεις στην περιγραφή της γνώσης**
  - Κάθε είδους **περιορισμοί που κάνουν το όλο πλαίσιο λήψης απόφασης ατελές.**

- Ανάγκη ύπαρξης "μη ακριβών" μεθόδων συλλογισμού.
  - *Θεωρία Πιθανοτήτων*
  - *Συντελεστές Βεβαιότητας (Certainty Factors)*
  - *Θεωρία Dempster-Shafer*
  - *Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic).*

Θεωρία Πιθανοτήτων

- *Αν E είναι ένα γεγονός, η **άνευ συνθηκών πιθανότητα** (unconditional probability) P(E) να συμβεί το γεγονός εκφράζεται με έναν πραγματικό αριθμό για τον οποίο* ισχύουν:
  - $0 \leq P(E) \leq 1$
  - $P(E) = 1$, αν E σίγουρο γεγονός
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
- ***Πιθανότητα υπό συνθήκη** (conditional probability):*
  - Η πιθανότητα να **ισχύει** το υποθετικό συμπέρασμα **H**, **δεδομένης** της ισχύος μόνο του **γεγονότος E**.

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}$$

- **Ιδιότητες**
  - *Προσθετική Ιδιότητα: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$*
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο ανεξάρτητα γεγονότα A και B: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B)$*
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο μη ανεξάρτητα γεγονότα A και B: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B|A)$*

Παραδείγματα

- Έστω ότι έχουμε ένα ζάρι:
- $P(A) = P(\text{περιττός αριθμός}) = 3/6 = 0.5$
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,3,5) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- $P(B) = P(\text{αριθμός} \leq 3) = 3/6 = 0.5$
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,2,3) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- $P(B|A) = P(\text{αριθμός} \leq 3,$ <u>δεδομένου ότι είναι περιττός</u>$) = 2/3$
  - γιατί υπάρχουν 2 δυνατές τιμές (1,3) από σύνολο 3 δυνατών τιμών (1,3,5)
- $P(A \wedge B) = P(\text{περιττός αριθμός και} \leq 3) = P(A)* P(B|A) = 0.5*2/3 = 0.33$
- $P(A \vee B)= P(\text{περιττός ή} \leq 3) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) = 0.5+0.5-0.33=0.67$ (προσθετική ιδιότητα)

Ο Νόμος του Bayes

- Επιτρέπει τον υπολογισμό πιθανοτήτων υπό συνθήκη με χρήση άλλων πιθανοτήτων που είναι ευκολότερο να υπολογιστούν.
- «σχετίζει την <u>τρέχουσα</u> πιθανότητα με την <u>αρχική</u> πιθανότητα».

- **Χρήση εκτιμήσεων αντί συχνοτήτων εμφάνισης γεγονότων.**
- Η απλούστερη εκδοχή του *νόμου του Bayes:*

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

- Πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί, συγκριτικά με την σχέση της *πιθανότητας υπό συνθήκη.*

Ο Νόμος του Bayes

- Αν Η μία ασθένεια και Ε ένα σύμπτωμα που σχετίζεται με αυτήν, τότε για τον υπολογισμό της *πιθανότητας υπό συνθήκη* **απαιτείται πληροφορία που συνήθως <u>δεν</u> είναι διαθέσιμη**:
  - Πόσοι άνθρωποι στον κόσμο πάσχουν από την Η και ταυτόχρονα εμφανίζουν το σύμπτωμα Ε.
  - Πόσοι εμφανίζουν απλά το σύμπτωμα Ε.

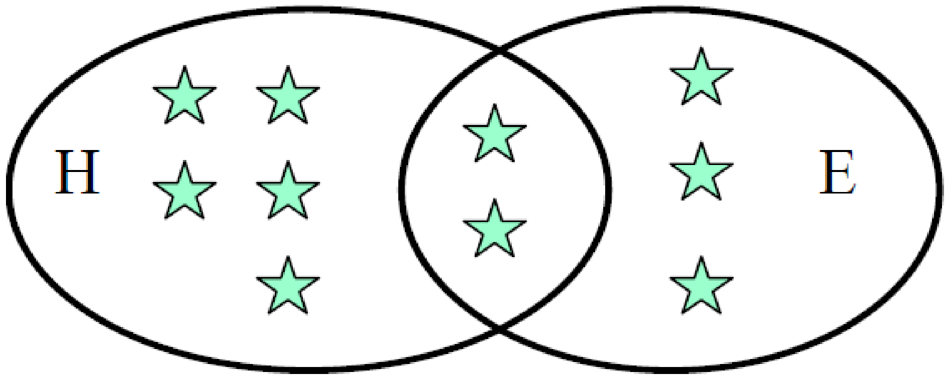
$$P(H \mid E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}$$

- Στο νόμο του Bayes:
  - Ένας γιατρός μπορεί να δώσει μία εκτίμηση για το πόσοι ασθενείς που έπασχαν από την ασθένεια Η εμφάνιζαν το σύμπτωμα Ε (**ποσότητα P(E|H)**). Αντίθετα, το κλάσμα των ασθενών με σύμπτωμα Ε που πάσχουν από την ασθένεια Η, δηλαδή ο **όρος P(H|E)**, τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο να εκτιμηθεί.
  - Το **P(H)** μπορεί να υπολογιστεί από στατιστικά στοιχεία για τον συνολικό πληθυσμό.
  - Το **P(E)** από στατιστικά στοιχεία του ίδιου του γιατρού.

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

Παράδειγμα

- Έστω τα δύο σύνολα H και E με 7 και 5 γεγονότα, αντίστοιχα, από ένα συνολικό πληθυσμό 10 γεγονότων.
- Το σχήμα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις **απλές** (άνευ συνθήκης) και τις **υπό συνθήκη πιθανότητες** με απλή εφαρμογή του ορισμού τους.



P(E) = 5/10 = 0.5
P(H) = 7/10 = 0.7
P(H|E) = 2/5 = 0.4
P(E|H) = 2/7 = 0.287514

- Στο παράδειγμα: P(H|E) * P(E) = P(E|H)*P(H)
- Γνωρίζοντας **τρεις** από τις πιθανότητες μπορούμε να υπολογίσουμε την **τέταρτη**.

Παράδειγμα

- Ορισμοί Παραμέτρων
  - P(H) = η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη («ασθένεια»)
  - P(E) = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό («σύμπτωμα»)
  - P(E|H) = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι έχει γρίπη
  - P(E|¬H) = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι <u>δεν</u> έχει γρίπη

- Δεδομένα
  - P(H)=0.0001 P(E|H)=0.8 P(E|¬H)=0.1

Παράδειγμα

- Δεδομένα
  - $P(H)=0.0001$ $P(E|H)=0.8$ $P(E|\neg H)=0.1$
  - P(H): γρίπη («ασθένεια»)
  - P(E): πυρετός («σύμπτωμα»)

- Ερωτήσεις
  - 1) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό;
    - **$P(E) = P(E \wedge H) + P(E \wedge \neg H) =$**

      (από ορισμό πιθαν. υπό συνθήκη)

      $= P(E|H)*P(H) + P(E|\neg H)* P(\neg H) =$

      $= 0.8 * 0.0001 + 0.1 * (1 - 0.0001) =$

      $= 0.0008 + 0.09999 = 0.10007$

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}$$

Παράδειγμα

- Δεδομένα
  - P(H)=0.0001 P(E|H)=0.8 P(E|¬H)=0.1
  - P(H): γρίπη («ασθένεια»)
  - P(E): πυρετός («σύμπτωμα»)

- Ερωτήσεις
  - *2) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι έχει πυρετό;*
    - P(H|E) = P(H)*P(E|H)/P(E) *(Bayes)*

      = 0.0001 * 0.8/0.10007 =

      = 0.0007994

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

Παράδειγμα

- Δεδομένα
  - P(H)=0.0001 P(E|H)=0.8 P(E|¬H)=0.1
- Ερωτήσεις
  - *3) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι <u>δεν</u> έχει πυρετό;*
    - P(H|¬E) = P(H)*P(¬E|H)/P(¬E) =

      (σχέση Bayes με ¬E αντί E)

      = 0.0001*(1-0.8)/(1-0.10007) =

      = 0.0000222

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

Γενική Σχέση του Νόμου του Bayes

- Η πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα H δεδομένης της ισχύος των γεγονότων $E_1, E_2, \ldots, E_k$:

$$P(H \mid E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k) = \frac{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k \mid H) \bullet P(H)}{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k)}$$

- **Πρόβλημα χρήσης:** για ***m*** *πιθανές ασθένειες και* ***n*** *δυνατά συμπτώματα από τα* οποία εμφανίζονται τα ***k****,* *απαιτούνται* $(m \cdot n)^k + m + n^k$ *τιμές πιθανοτήτων, αριθμός* **υπερβολικά μεγάλος! !**
- **Απλούστερη περίπτωση:** αν τα διάφορα γεγονότα E θεωρούνται **ανεξάρτητα** το ένα από το άλλο, τότε απαιτούνται μόνο $m \cdot n + m + n$ *τιμές πιθανοτήτων.*

Χρήση Θεωρίας Πιθανοτήτων - Συμπεράσματα

- Είτε τα διάφορα γεγονότα θεωρούνται ανεξάρτητα (ευκολότεροι υπολογισμοί σε βάρος της ακρίβειας των συλλογισμών)

- ή καταγράφονται αναλυτικά όλες οι πιθανότητες και οι μεταξύ του συσχετίσεις
  - ακριβή συμπεράσματα, με υψηλό όμως υπολογιστικό κόστος

- Εναλλακτική προσέγγιση: **Συντελεστές βεβαιότητας**

Συντελεστές Βεβαιότητας (Certainty Factors)

- Αριθμητικές τιμές που **εκφράζουν τη βεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης ή γεγονότος.**
- **if** *γεγονός* ***then*** *υποθετικό συμπέρασμα* ***με βεβαιότητα CF***
  - Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8
- Παίρνουν τιμές στο διάστημα [-1, +1]
  - –1 : **απόλυτη βεβαιότητα** για το **ψευδές** της πρότασης.
  - +1 : **απόλυτη βεβαιότητα** για την **αλήθεια** της πρότασης.
  - 0 : **άγνοια**.
- Τιμές βεβαιότητας και στην τιμή του γεγονότος του κανόνα:
  - Παράδειγμα: if πυρετός CF_1 0.7 then γρίπη CF 0.8
    - τελική βεβαιότητα κανόνα: 0.7 x 0.8 = 0.56
- Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα γεγονότα στο αριστερό τμήμα του κανόνα τα οποία συνδέονται με **AND** (ή *OR*), τότε ως συντελεστής βεβαιότητας του αριστερού τμήματος θεωρείται η **μικρότερη** (ή η *μεγαλύτερη*) τιμή CF που εμφανίζεται.

Συντελεστές Βεβαιότητας (Certainty Factors)

- Αν δύο διαφορετικοί κανόνες **συνάγουν το ίδιο υποθετικό συμπέρασμα** με βεβαιότητες CF_p και CF_n, τότε η συνολική βεβαιότητα είναι:
- Αν CF_p και $CF_n > 0$, τότε: $CF = CF_p + CF_n \cdot (1 - CF_p) = CFp + CF_n - CF_n \cdot CF_p$
- Αν CF_p και $CF_n < 0$, τότε: $CF = CF_p + CF_n \cdot (1 + CF_p) = CF_p + CF_n + CF_n \cdot CF_p$
- Αν CF_p και CF_n ετερόσημα, τότε: $$CF = \frac{CF_p + CF_n}{1 - \min(|CF_p|, |CF_n|)}$$
- Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8

  if βήχας then γρίπη CF 0.5
- **Συμπερασματικά:**
- Αντί για συχνότητες εμφάνισης γεγονότων που πρέπει να μετρηθούν, χρησιμοποιούνται συντελεστές βεβαιότητας που <u>έχουν εκτιμηθεί από ειδικούς</u>.
- Οι **υπολογισμοί** κατά το συνδυασμό βεβαιοτήτων είναι **απλούστεροι**, λόγω της παραδοχής της ανεξαρτησίας των γεγονότων.
- <u>Προσοχή</u>: πρέπει να αποφεύγεται η ταυτόχρονη χρήση κανόνων που αναστρέφουν τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος. Π.χ. *if A then B και if B then A*

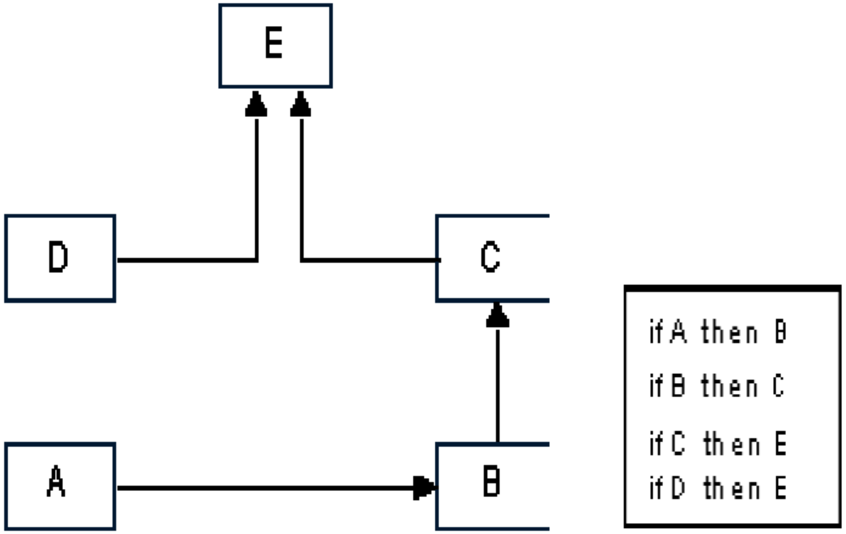
Παράδειγμα

- Έστω ότι 2 κανόνες οδηγούν στο ίδιο υποθετικό συμπέρασμα B, κάτω όμως από διαφορετικές παραδοχές, δηλαδή:
  - if A then B CF 0.8
  - if C AND D AND E then B CF 0.6
- Αν ο χρήστης εισάγει τα δεδομένα A, C, D και E με βεβαιότητες:
  - CF(A)=0.5, CF(C)=0.9, CF(D)=0.7 και CF(E)=0.5 τότε:
- Η ενεργοποίηση του πρώτου κανόνα δίνει:
  - $CF_p(B)=0.5 * 0.8 = 0.4$
- Η ενεργοποίηση του δεύτερου κανόνα δίνει:
  - $CF_n(B)=0.6 * \min(0.9, 0.7, 0.5) = 0.6 * 0.5 = 0.3$
- Επειδή τα CF_p και CF_n είναι και τα δύο θετικά, η **συνολική βεβαιότητα** του υποθετικού συμπεράσματος B θα είναι:
  - $CF(B) = 0.4 + 0.3 - (0.4 \times 0.3) = 0.58$

Αν CF_p και $CF_n > 0$, τότε: $CF = CF_p+CF_n \cdot (1-CF_p) = CFp+CF_n – CF_n \cdot CF_p$

Δίκτυα Πιθανοτήτων (Bayesian Probability Networks)

- Αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της **αλληλεπίδρασης** των πιθανοτήτων.
- Στον **πραγματικό κόσμο** τα διάφορα **γεγονότα** δεν **αλληλεπιδρούν** όλα το ένα με το άλλο αλλά **μερικώς**.
  - Δεν χρειάζεται να υπολογίζονται οι πιθανότητες όλων των συνδυασμών γεγονότων.
- Απαγορεύεται η ύπαρξη βρόχων μέσα στο δίκτυο.
- Δεν γίνεται ταυτόχρονη χρήση κανόνων που αντιστρέφουν την σχέση αιτίας-αποτελέσματος.



Δίκτυα Συμπερασμού (Inference Networks)

- Παραλλαγή των δικτύων πιθανοτήτων.
- Οι κανόνες υποδηλώνουν μία "χαλαρή" συνεπαγωγή:
  - ***if*** *γεγονός* ***then*** *υποθετικό συμπέρασμα* ***με βαθμό ισχύος S***
- Περίπτωση Υλοποίησης: με τη χρήση των μεγεθών
  - **Εύνοια Γεγονότος** (Odds - **O**)
  - **Λογική Επάρκεια** (Logical Sufficiency – **LS**)
  - **Λογική Αναγκαιότητα** (Logical Necessity – **LN**)

$$O(E) = \frac{P(E)}{1 - P(E)} \qquad LS = \frac{P(E \mid H)}{P(E \mid \neg H)} = \frac{O(H \mid E)}{O(H)}$$

$$LN = \frac{P(\neg E \mid H)}{P(\neg E \mid \neg H)} = \frac{O(H \mid \neg E)}{O(H)}$$

Δίκτυα Συμπερασμού (Inference Networks)

- Γενική μορφή κανόνα σε δίκτυα συμπερασμού:
  - *$P_o(H)$: πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα H όταν απουσιάζει οποιαδήποτε ένδειξη για την ισχύ του γεγονότος E.*
  - *Αν γίνει γνωστή η ύπαρξη του E τότε και η πιθανότητα του H αλλάζει σε P(H|E).*
  - *Όλες οι αλλαγές προωθούνται μέσα στο δίκτυο των κανόνων*

$$E \xrightarrow[(LS,LN)]{} \underset{P_o(H)}{H}$$

- <u>Παράδειγμα δικτύου συμπερασμού</u>:

$$X \xrightarrow[(LS_1=4\ ,LN_1=0.5\ )]{} \underset{p_o(Y)=0.1}{Y} \xrightarrow[(LS_2=10\ ,LN_2=0.2\ )]{} \underset{p_o(Z)=0.2}{Z}$$

- Po(Y) και Po(Z): αρχικές τιμές πιθανότητας για τα Y και Z, χωρίς να υπάρχει οποιασδήποτε γνώση για το X
- Έστω ότι η τιμή του X γίνεται γνωστή. Μετά από πράξεις, η τελική μορφή του δικτύου:

$$X \xrightarrow[(LS_1=4\ ,LN_1=0.5\ )]{} \underset{P(Y|X)=0.307}{Y} \xrightarrow[(LS_2=10\ ,LN_2=0.2\ )]{} \underset{P(Z|X)=0.252}{Z}$$

Προσέγγιση Dempster-Shafer

- **Δεν απαιτείται η συλλογή όλων των απλών και των υπό συνθήκη πιθανοτήτων.**
- Λογισμός με αριθμητικές τιμές πεποίθησης (belief)
- Πλαίσιο διάκρισης (frame of discernment)
- Αν U={A, B, C} πιθανές ασθένειες τότε:

  Pow(U) = { {}, {A}, {B}, {C}, {A, B}, {A, C}, {B, C}, {A, B, C} }

  πιθανές διαγνώσεις.
- **Διαζευγμένες Προτάσεις**: {A, B} σημαίνει "ασθένεια A **ή** B".
- Στοιχεία του U που δεν ανήκουν σε ένα στοιχείο του Pow(U), (π.χ. η ασθένεια C στο {A, B}), κάνουν σαφή την άρνηση του αντίστοιχου υποθετικού συμπεράσματος.
- **{}: null hypothesis**

Προσέγγιση Dempster-Shafer

- Η **βασική κατανομή πιθανότητας** (basic probability assignment - bpa) είναι μία απεικόνιση(συνάρτηση): **m:** Pow(U) → [0,1]

  δηλαδή το μέτρο της πεποίθησης που υπάρχει για το κατά πόσο ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα που εκφράζεται με το συγκεκριμένο στοιχείο του U.

  - η πεποίθηση m({A, B})=0.3, δε μοιράζεται στα {A} και {B}, αλλά αφορά το {A, B}.
  - ισχύει m({})=0

$$\sum_{X \in Pow(U)} m(X) = 1$$

  - Η ποσότητα m(X) **εκφράζει το πόσο ισχυρή είναι η πεποίθηση για το ότι ένα συγκεκριμένο στοιχείο του U ανήκει στο X αλλά όχι σε κάποιο από τα τυχόν υποσύνολα του X**.

- Η συνολική **πεποίθηση** (**belief**) ότι ένα στοιχείο του U ανήκει στο X καθώς και στα τυχόν υποσύνολα του X, συμβολίζεται με **Bel(X):**

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

Σύγκριση Dempster-Shafer vs. Bayes

- **Dempster-Shafer**: η απουσία κάποιων ενδείξεων θέτει την πιθανότητα (likelihood) κάθε εκδοχής κάπου στο διάστημα [0, 1].
- **Bayes**: η απουσία άλλων ενδείξεων για τις δυνατές εκδοχές τις καθιστά **ισοπίθανες**.

Κανόνας Dempster-Shafer

- Αν m_1 και m_2 **δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις** (βασικές κατανομές πιθανότητας) που αποδίδουν κάποιο βαθμό πεποίθησης στα στοιχεία του Pow(U), τότε αυτές **συνδυάζονται** σε μία **τρίτη εκτίμηση** $m_3 = m_1 \oplus m_2$ με τρόπο που ορίζεται με τον κανόνα D-S:

$$\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y} \in \mathrm{U} : \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{A}} m_1(\mathrm{X}) \bullet m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y} \in \mathrm{U} : \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing} m_1(\mathrm{X}) \bullet m_2(\mathrm{Y})}$$

Παράδειγμα: Διάγνωση ασθένειας

- Έστω U={A, B, C} το σύνολο των δυνατών ασθενειών που μπορεί να διαγνωσθούν.

- Πιθανές Διαγνώσεις Pow(U)={{}, {A}, {B}, {C}, {A,B}, {A,C}, {B,C}, {A,B,C}}
- **βασική κατανομή πιθανότητας:**

  m({{ }, {A}, {B}, {C}, {A, B}, {A, C}, {B, C}, {A, B, C} }) = 1
  - υποδηλώνει τη βεβαιότητα ότι η διάγνωση βρίσκεται κάπου στα στοιχεία του Pow(U), αλλά ελλείψει άλλων ενδείξεων δεν είναι δυνατό να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα σε κάποιο
  - Bayes: θα έπρεπε κάθε στοιχείο του Pow(U) να θεωρηθεί ισοπίθανο

- Έστω ότι γίνεται διαθέσιμη επιπλέον πληροφορία, (π.χ. πραγματοποιούνται ιατρικές εξετάσεις) και προκύπτει ότι η ασθένεια είναι μία από τις A ή B με βαθμό πίστης 0.7

Παράδειγμα: Διάγνωση ασθένειας

- Έστω ότι γίνεται διαθέσιμη επιπλέον πληροφορία, (π.χ. πραγματοποιούνται ιατρικές εξετάσεις) και προκύπτει ότι «**η ασθένεια είναι μία από τις Α ή Β με βαθμό πίστης 0.7»**
  - m1({A, B}) = 0.7
  - m1({{ }, {A}, {B}, {C}, {A, C}, {B, C}, {A, B, C}}) = 0.3
  - Δηλαδή, η έλλειψη πίστης σε ένα από τα υποθετικά συμπεράσματα του Pow(U), **ισοδυναμεί αυτόματα με ισόποσο βαθμό πίστης στα υπόλοιπα** στοιχεία του Pow(U), <u>χωρίς όμως να δίνεται ιδιαίτερη προτίμηση σε κάποιο από αυτά</u>!
  - Bayes: απαιτείται ο υπολογισμός μεγάλου αριθμού υπό συνθήκη πιθανοτήτων, κάτι που είναι υπολογιστικά ακριβό και πολλές φορές αδύνατο.

$$\sum_{X \in Pow(U)} m(X) = 1$$

- Πώς μπορεί να συνδυαστούν δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (π.χ. δύο ιατρών) σε μία;

Παράδειγμα: Συνδυασμός Διαγνώσεων

- Έστω ότι δύο γιατροί εξετάζουν ανεξάρτητα τον ασθενή και δίνουν την εκτίμησή τους m_1 και m_2 αντίστοιχα, για την αρρώστια από την οποία αυτός πάσχει.

	Γιατρός 1		Γιατρός 2	
Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	**m_1**	**Bel_1**	**m_2**	**Bel_2**
{A}	0.05	0.05	0.15	0.15
{B}	0	0	0	0
{C}	0.05	0.05	0.05	0.05
{A, B}	0.15	0.2	0.05	0.2
{A, C}	0.1	0.2	0.2	0.4
{B, C}	0.05	0.1	0.05	0.1
{A, B, C}	0.6	1	0.5	1

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

Παράδειγμα: Συνδυασμός Διαγνώσεων

	Γιατρός 1		Γιατρός 2	
Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	m_1	Bel_1	m_2	Bel_2
{A}	0.05	0.05	0.15	0.15
{B}	0	0	0	0
{C}	0.05	0.05	0.05	0.05
{A, B}	0.15	0.2	0.05	0.2
{A, C}	0.1	0.2	0.2	0.4
{B, C}	0.05	0.1	0.05	0.1
{A, B, C}	0.6	1	0.5	1

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

- π.χ.: $Bel_1(\{A,B\}) = m_1(\{A,B\}) + m_1(\{A\}) + m_1(\{B\})$

  $= 0.15 + 0.05 + 0 = 0.2$
- Οι δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις m_1 και m_2 μπορεί να συνδυαστούν στη m_3 χρησιμοποιώντας τον κανόνα Dempster-Shafer:

Παράδειγμα: Συνδυασμός Διαγνώσεων

	Γιατρός 1		Γιατρός 2	
Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	m_1	Bel_1	m_2	Bel_2
{A}	0.05	0.05	0.15	0.15
{B}	0	0	0	0
{C}	0.05	0.05	0.05	0.05
{A, B}	0.15	0.2	0.05	0.2
{A, C}	0.1	0.2	0.2	0.4
{B, C}	0.05	0.1	0.05	0.1
{A, B, C}	0.6	1	0.5	1

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

$$\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}):\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{A}} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}):\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}$$

Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων

$m_3=m_1 \oplus m_2$		m_1						
		{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
m_2		0.05	0	0.05	0.15	0.1	0.05	0.6
{A}	0.15	{A} .0075	{ } 0	{ } .0075	{A} .0225	{A} .015	{ } .0075	{A} .09
{B}	0	{ } .0	{B} 0	{ } .0	{B} .0	{ } .0	{B} .0	{B} .0
{C}	0.05	{ } .0025	{ } 0	{C} .0025	{ } .0075	{C} .005	{C} .0025	{C} .03
{A,B}	0.05	{A} .0025	{B} 0	{ } .0025	{A,B} .0075	{A} .005	{B} .0025	{A,B} .03
{A,C}	0.2	{A} .01	{ } 0	{C} .01	{A} .03	{A,C} .02	{C} .01	{A,C} .012
{B,C}	0.05	{ } .0025	{B} 0	{C} .0025	{B} .0075	{C} .005	{B,C} .0025	{B,C} .03
{A,B,C}	0.5	{A} .025	{B} 0	{C} .025	{A,B} .075	{A,C} .05	{B,C} .025	{A,B,C} .3

Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων

Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	m_3	Bel_3
{A}	0.21	0.21
{B}	0.01	0.01
{C}	0.09	0.09
{A, B}	0.12	0.34
{A, C}	0.20	0.50
{B, C}	0.06	0.16
{A, B, C}	0.31	1.00

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

- Η αρχική εκτίμηση ότι η ασθένεια είναι μία από τις Α ή Β αποδυναμώθηκε.
  - η διάγνωση βρίσκεται μάλλον στο σύνολο **{A,C}**
  - επειδή $Bel_3(\{A\}) > Bel_3(\{C\})$, αρχίζει να διαφαίνεται ότι **η τελική διάγνωση είναι η Α**
- Η παραπάνω **συνδυασμένη εκτίμηση** μπορεί να συνδυαστεί εκ νέου με μια άλλη εκτίμηση (π.χ. $3^{ου}$ ιατρού).

Περιεχόμενα Β’ μέρους

- Ασάφεια
- Ασαφή Σύνολα
- Ασαφείς σχέσεις
- Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί
- Συλλογιστικές Διαδικασίες
- Ασαφής Συλλογιστική
- Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής
- Συμπεράσματα
- Εφαρμογές

Ασάφεια

- ...δεν είναι καθόλου ...ασαφής ή ανακριβής, όπως ίσως αφήνει να εννοηθεί σε πρώτο άκουσμα ο όρος "ασαφής".
  - Αντίθετα, είναι μια ακριβής λογική α) χειρισμού της περιορισμένης ακρίβειας και β) συλλογιστικής υπό καθεστώς περιορισμένης ακρίβειας.
- **...προσπαθεί να μοντελοποιήσει 2 βασικές ανθρώπινες ικανότητες:**
  - την ικανότητα να λαμβάνουμε αποφάσεις υπό καθεστώς ανακριβούς – αβέβαιης – ελλιπούς πληροφορίας ("in an environment of imperfect information")
  - την ικανότητα να εκτελούμε πολύπλοκες φυσικές και διανοητικές διεργασίες χωρίς να χρειάζονται μετρήσεις και υπολογισμοί (π.χ. παρκάρισμα αυτοκινήτου)
- ...είναι μιας μορφής *πολύτιμη (many-valued) λογική*
  - **κλασική λογική**: κάτι είναι είτε αληθές ή ψευδές
  - **ασαφής λογική**: η τιμή αληθείας για κάτι κυμαίνεται μεταξύ 0 (απολύτως ψευδές) και 1 (απολύτως αληθές) – είναι υπερσύνολο της κλασικής λογικής!!
- ...προτάθηκε το 1965 από τον Lofti Zadeh (Ιρανικής καταγωγής)
  - Η *Θεωρία Ασαφών Συνόλων (Fuzzy Set Theory) που πρότεινε παρέχει ένα* πλαίσιο χειρισμού της **ασάφειας** και ένα πλαίσιο **συλλογιστικής βασισμένης σε ασάφεια**.

- ...είναι μια από τις πιο πετυχημένες προσεγγίσεις στην ΤΝ με πλήθος εφαρμογών

Ασάφεια

- Η ασάφεια είναι εγγενές χαρακτηριστικό της ανθρώπινης γλώσσας.
  - *"Ο Νίκος είναι ψηλός." – πόσο είναι το ύψος του Νίκου;*
  - *"Το φαγητό είναι ανάλατο, ρίξε λίγο αλάτι." – πόσο αλάτι πρέπει να ρίξουμε;*
  - *"Η πίεση είναι μεγάλη, χαμήλωσε λίγο το λέβητα." – πόσο πρέπει να τον χαμηλώσουμε;*
- **Πηγές ασάφειας:**
  - χρήση λεκτικών προσδιορισμών για μεγέθη (ψηλός, βαρύς, πολύ μικρός, σχετικά κοντός)
    - η αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών διαφέρει (***σημασιολογική ασάφεια****)*
    - απόδοση συγκεκριμένης τιμής σε λεκτικά μεγέθη μπορεί να οδηγήσει σε λάθος κρίσεις
      - π.χ. ο 1.95 ύψους μπασκεμπολίστας είναι ψηλός, ενώ ο 1.94 δεν είναι (θεωρώντας όριο 1.95)
  - μετρήσεις προερχόμενες από ανακριβείς ή προβληματικούς αισθητήρες
  - ανακριβείς εκτιμήσεις (π.χ. "η διαδήλωση/συγκέντρωση φαινόταν μεγάλη αλλά δεν ήταν")
  - πλήρης έλλειψη πληροφορίας
- Η σημασία της λέξης "fuzzy" είναι λίγο αντίθετη με την αυστηρή δυτική κουλτούρα:
  - "το αυτοκίνητο φρενάρει με μηχανισμό ασαφούς ελέγχου" - ακούγεται λίγο τρομακτικό!!
  - Δεν είναι τυχαίο ότι υιοθετήθηκε πρώτα στις ανατολικές χώρες (Ιαπωνία, Ασία – '70s-'80s), μετά στην Ευρώπη ('80s-'90s) και τελευταία στις ΗΠΑ (mid '90s).

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

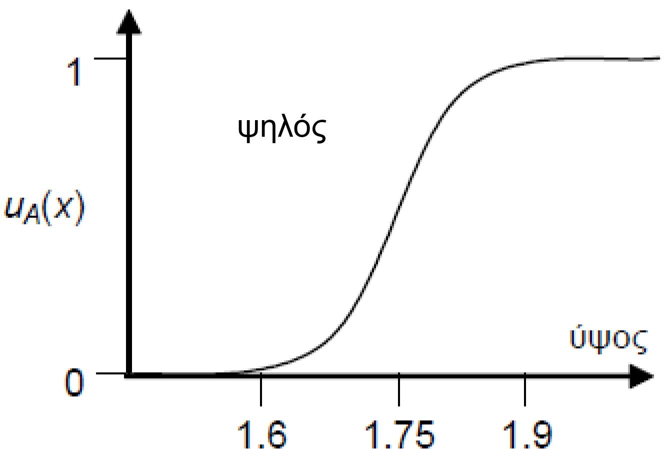
- Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα:
- Έστω το ασαφές σύνολο «**κάθισμα**».
- Σε τι βαθμό (από 0 ως 1) ανήκουν σε αυτό τα ακόλουθα αντικείμενα:

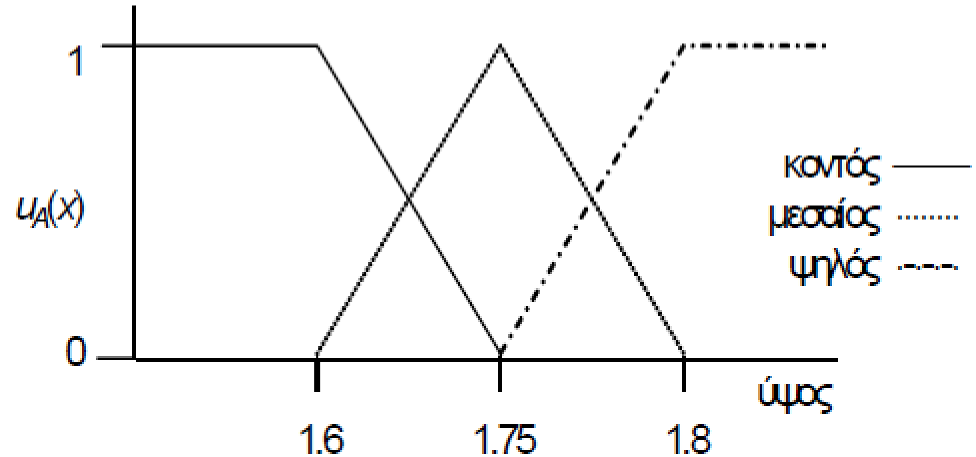
  καρέκλα, καναπές, σκαμπό, κιβώτιο, κοτρώνα (μεγάλη πέτρα), γραφείο, σκαλοπάτι
  - για την καρέκλα είμαστε σίγουροι ότι ανήκει σε βαθμό 1
  - ένα γραφείο σίγουρα δεν είναι κάθισμα, αλλά μπορεί να λειτουργήσει ως κάθισμα
    - θα λέγαμε ανήκει στο σύνολο σε/με βαθμό π.χ.: 0.2
- Έστω ένα σύνολο **X που περιλαμβάνει όλα τα υπό αναφορά αντικείμενα x.**

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- **Ασαφές Σύνολο** (fuzzy set) **A**: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών (x, $\mu_A(x)$), όπου $x \in X$ και $\mu_A(x) \in [0,1]$).
  - Το σύνολο X περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά.
  - $\mu_A(x)$: **βαθμός αληθείας** (degree of truth) - παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1].
  - Η συνάρτηση μ_A ονομάζεται **συνάρτηση συγγένειας** (membership function).
  - Η τιμή μ(x) μας λέει πόσο πιστεύουμε ότι το x ανήκει στο σύνολο X.
    - π.χ. το *x=σκαμπό ανήκει στο ασαφές σύνολο X=κάθισμα σε βαθμό* $u_{κάθισμα}$*(σκαμπό)=0.8*
- Πώς προκύπτουν οι τιμές $\mu_A(x)$:
  - Υποκειμενικές εκτιμήσεις
  - Προκαθορισμένες (ad hoc) μορφές
  - Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
    - π.χ. ρωτάμε 100 ανθρώπους αν το ύψος 1.80 είναι ψηλός
  - Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (συνήθως νευρωνικά δίκτυα)

Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων





- με αναλυτική έκφραση της μ_A (δηλ. ξέρουμε την εξίσωση της μ_A – βλ. σχήμα αριστερά)
  - Απλούστευση: ***τμηματικώς γραμμική απεικόνιση*** *της μ_A* (με τρίγωνα, τραπέζια – βλ. σχήμα δεξιά)
- με σύνολο ζευγών της μορφής $\mu_A(x)/x$
  - Π.χ. ψηλός = {0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95}
- με ζεύγη της μορφής (x, $\mu_A(x)$):
  - Π.χ. ψηλός = { (1.7, 0), (1.75, 0), (1.8, 0.33), (1.85, 0.66), (1.9, 1), (1.95, 1) }

Ιδιότητες Ασαφών Συνόλων

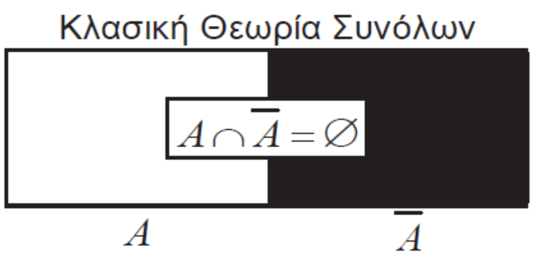
- Έστω δύο ασαφή σύνολα A και B, ορισμένα στο S (*universe of discourse) με* συναρτήσεις συγγένειας *uA(x) και uB(x). Ισχύουν τα ακόλουθα:*

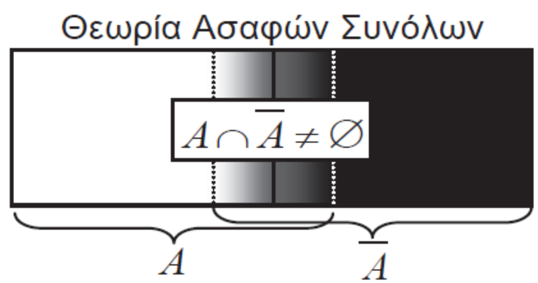
  - **Ισότητα**: A=B αν $u_A(x)=u_B(x) \quad \forall x \in S$
  - **Συμπληρωματικότητα**: το συμπληρωματικό του A γράφεται $\overline{A}$ και έχει συνάρτηση συγγένειας: $u_{\overline{A}}(x) = 1 - u_A(x)$
    - Είναι το ισοδύναμο της **άρνησης** (***NOT***) στην ασαφή λογική
  - **Ένωση**: $A \cup B$: $u_{A \cup B}(x) = \vee(u_A(x), u_B(x)) = \max(u_A(x), u_B(x)) \quad \forall x \in S$
    - Είναι το ισοδύναμο της **διάζευξης** (***OR***) στην ασαφή λογική
  - **Τομή**: $A \cap B$: $u_{A \cap B}(x) = \wedge(u_A(x), u_B(x)) = \min(u_A(x), u_B(x)) \quad \forall x \in S$
    - Είναι το ισοδύναμο της **σύζευξης** (***AND***) στην ασαφή λογική
  - **Πολύ A** (π.χ. πολύ ζεστός) VERY A: $u_{VERY(A)}(x) = [u_A(x)]^2 \quad \forall x \in S$

❖ Σύζευξη, Διάζευξη και Άρνηση είναι πολύ χρήσιμα στους Ασαφείς Κανόνες if...then

Ο Νόμος της Αντίφασης

- Ο νόμος της αντίφασης, <u>δεν</u> ισχύει στα ασαφή σύνολα:
  - **κλασική θεωρία συνόλων**: κάτι ανήκει σε ένα σύνολο ή στο συμπληρωματικό του
    - Παράδειγμα: ο αριθμός 10 θα ανήκει στο σύνολο *'μεγάλοι ακέραιοι' ή στο σύνολο 'όχι μεγάλοι ακέραιοι' – η τομή συμπληρωματικών συνόλων είναι το κενό σύνολο:* $A \cap \overline{A} = \varnothing$
  - **θεωρία ασαφών συνόλων**: το 10 θα ανήκει, σε κάποιο βαθμό, και στα δύο σύνολα!





- **Βλέπουμε δεξιά ότι τα όρια των ασαφών συνόλων είναι ...ασαφή!**

Ασαφείς Σχέσεις

- **Ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης**.
  - Παράδειγμα: R = "x είναι βαρύτερο από y" x∈X, y∈Y και R∈ X×Y
- Αναπαράσταση της R, σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} u_R(x_1, y_1) & u_R(x_1, y_2) & \cdots & u_R(x_1, y_n) \\ u_R(x_2, y_1) & u_R(x_2, y_2) & \cdots & u_R(x_2, y_n) \\ & \vdots & & \\ u_R(x_m, y_1) & u_R(x_m, y_2) & \cdots & u_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

- **Σύνθεση** (*composition*) **Ασαφών Σχέσεων**: *συνδυασμός ασαφών σχέσεων.*
  - Πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση συγγένειας $\mu_R(x,z)$ της R, με χρήση των συναρτήσεων συγγένειας των R_1 και R_2, δηλαδή των $\mu_{R1}(x,y)$ και $\mu_{R2}(y,z)$.

Ασαφείς Σχέσεις

- **Σύνθεση max-min (max-min composition)**
- **Σύνθεση max-product (max-product composition).**
- Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα X×Y και Y×Z αντίστοιχα, τότε η σύνθεσή τους δίνει μία νέα σχέση $R_1{}^\circ R_2$ ορισμένη στο X×Z με συνάρτηση συγγένειας:

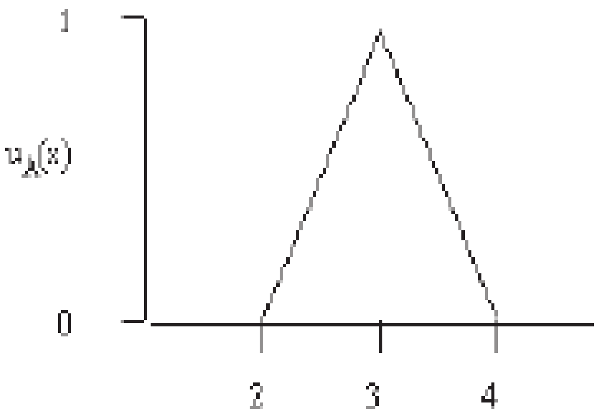
  - *Σύνθεση max-min*: $$u_{R1\circ R2}(x,z) = \bigvee_y [u_{R1}(x,y) \wedge u_{R2}(x,y)]$$
  - *Σύνθεση max-product*: $$u_{R1\circ R2}(x,z) = \bigvee_y [u_{R1}(x,y) \bullet u_{R2}(x,y)]$$

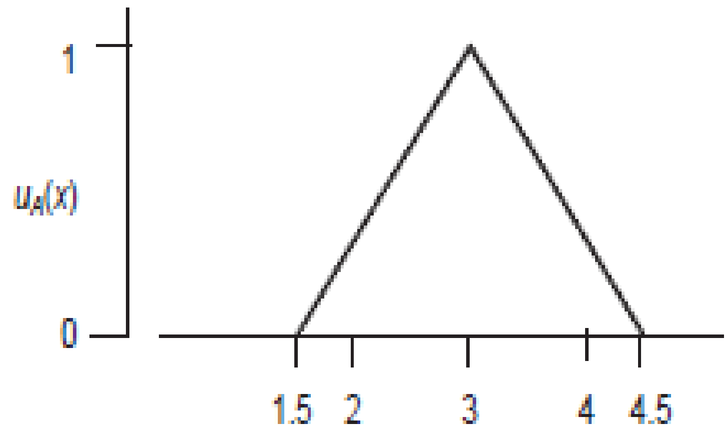
Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί

- **Ασαφής Μεταβλητή** (fuzzy variable): οι τιμές της ορίζονται με ασαφή σύνολα.
  - Π.χ. τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς μεταβλητής "ύψος".
  - "ύψος": λεκτική (linguistic) μεταβλητή.
- **Ασαφείς αριθμοί** (fuzzy numbers): ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
  - Π.χ. "Ασαφές 3" στο επόμενο σχήμα.
- Μη ασαφείς τιμές: **crisp** (σαφείς, συγκεκριμένες).

Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί

- "Ασαφές 3" με συνάρτηση συγγένειας όπως στο σχήμα αριστερά:





- Στο σχήμα δεξιά βλέπουμε ένα ...περισσότερο ασαφές 3.
  - έχει μη-μηδενική συνάρτηση συγγένειας σε μεγαλύτερο εύρος τιμών (1.5 ως 4.5 αντί 2 ως 4)

Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- **Ασαφής πρόταση** είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια ασαφή μεταβλητή.
  - Το **ύψος του Νίκου είναι μέτριο.**
    - ύψος: ασαφής μεταβλητή
    - μέτριο: η λεκτική τιμή της ασαφούς μεταβλητής ύψος – ορίζεται με ένα ασαφές σύνολο
- **Ασαφής κανόνας** (fuzzy rule): είναι μία υπό συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις.
  - **ΕΑΝ** η ταχύτητα είναι μέτρια, **ΤΟΤΕ** η πίεση στα φρένα να είναι μέτρια
  - **ΕΑΝ** η ταχύτητα είναι μικρή **ΚΑΙ** η απόσταση μεγάλη **ΤΟΤΕ** η διάρκεια λειτουργίας να είναι μεγάλη.
- Κανόνες σαν τους παραπάνω, θέλουμε να μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για συλλογιστική υπό συνθήκες περιορισμένης ακρίβειας, δηλ. **ασαφή συλλογιστική**.
  - Βέβαια, ακόμη κι όταν έχουμε ακρίβεια, η ικανότητα περιγραφής ενός πολύπλοκου συστήματος με χρήση τέτοιων απλών κανόνων αποτελεί μεγάλο πλεονέκτημα!
- Παρόλο που τα μαθηματικά της θεωρίας ασαφών συνόλων προσδιορίζουν επίσημα τον τρόπο μαθηματικού υπολογισμού της σχέσης συνεπαγωγής και του συμπεράσματος ενός κανόνα, στη συνέχεια, θα αρκεστούμε σε έναν γενικό ορισμό και για απλοποίηση θα δούμε την ασαφή συλλογιστική περισσότερο πρακτικά

Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- Η αναλυτική περιγραφή ενός ασαφούς κανόνα if-then είναι μία ασαφής σχέση R(x,y) που ονομάζεται **σχέση συνεπαγωγής** (implication relation).

- Η γενική μορφή της σχέσης (συνάρτησης) συνεπαγωγής:

$$R(x,y) \equiv u(x,y) = \phi(\ u_A(x), u_B(y)\ )$$

(**φ**: **τελεστής συνεπαγωγής** (implication operator))

Μερικοί Ασαφείς Τελεστές Συνεπαγωγής

Ονομασία Τελεστή	**Αναλυτική Έκφραση του $\varphi[uA(x),uB(y)]$**
φ_m: Zadeh Max-Min	$(u_A(x) \wedge u_B(y)) \vee (1- u_A(x))$
φ_c: Mandani Min	$u_A(x) \wedge u_B(y)$
φ_p: Larsen Product	$u_A(x) \bullet u_B(y)$
φ_α: Arithmetic	$1 \wedge (1-u_A(x) + u_B(y))$
φ_b: Boolean	$(1-u_A(x)) \vee u_B(y))$

Συλλογιστικές Διαδικασίας GMP και GMT

- Γενική μορφή προβλημάτων κατά τη συλλογιστική με ασαφείς κανόνες:
  - if x is A then y is B
  - x is A' y is B' (?)
    - μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMP (**Generalized Modus Ponens** - GMP): B'=*A'oR(x,y)*
  - if x is A then y is B
  - x is A' (?) y is B'
    - μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMT (**Generalized Modus Tollens -** GMT): A'=*R(x,y)oB*
- Η *σχέση συνεπαγωγής R(x,y) που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί, πρέπει να* συνδυαστεί (σύνθεση) με την κατά περίπτωση γνωστή παράμετρο (A' ή B'), ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη παράμετρος.

Σύνοψη Ασαφούς Συλλογιστικής Διαδικασίας

- Με βάση έναν ασαφή κανόνα της μορφής:

  “if x is A then y is B”

- και έστω συλλογιστική διαδικασία GMP* (**δηλαδή γνωστό το A' ως τιμή του x και ζητούμενο το B' ως τιμή του y**), τα ασαφή σύνολα A και B συνδυάζονται με κάποιον από τους τελεστές συνεπαγωγής και παράγουν τη σχέση συνεπαγωγής R(x,y).
- Από την R(x,y) μέσω σύνθεσης (έστω max-min σύνθεση) με το A' προκύπτει η άγνωστη ποσότητα B':

$$B'=A'oR(x,y)$$

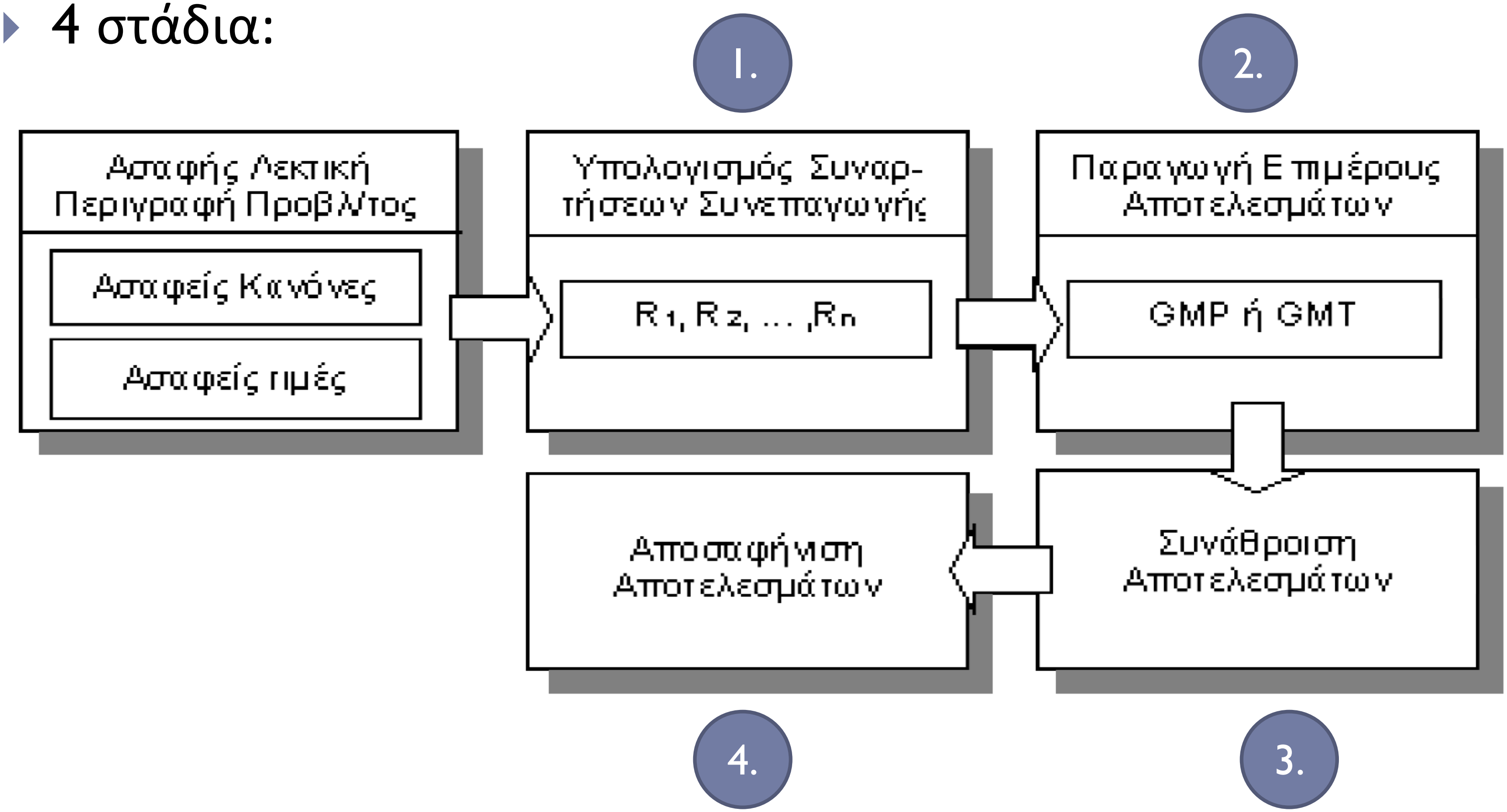
*: Roger Martin-Clouaire, “Semantics and computation of the generalized modus ponens: The long paper”, International Journal of Approximate Reasoning, Volume 3, Issue 2, 1989, pp. 195-217, https://doi.org/10.1016/0888-613X(89)90006-6

Ασαφής Συλλογιστική

- Εξαγωγή συμπερασμάτων με χρήση ασαφών κανόνων.
- 4 στάδια:
  1. **Υπολογισμός** της **συνάρτησης συνεπαγωγής** για κάθε εμπλεκόμενο κανόνα.
  2. **Παραγωγή** επιμέρους **αποτελεσμάτων** μέσω κάποιας συλλογιστικής διαδικασίας.
  3. **Συνάθροιση** των επιμέρους αποτελεσμάτων.
  4. **Αποσαφήνιση** αποτελεσμάτων.

Ασαφής Συλλογιστική

- Εξαγωγή συμπερασμάτων με χρήση ασαφών κανόνων.
- 4 στάδια:



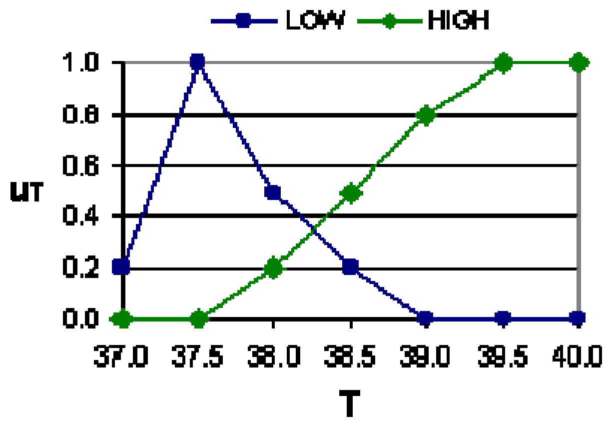
Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής

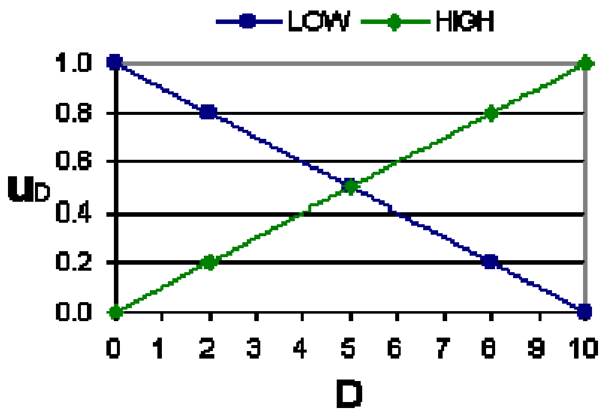
- Έστω σύστημα που **ρυθμίζει τη δόση D μιας φαρμακευτικής ουσίας που πρέπει να χορηγηθεί σε ασθενή, με βάση τη θερμοκρασία του T**.
- Έστω ότι το σύστημα βασίζεται στους εξής 2 ασαφείς κανόνες:
  - K_1: if T is HIGH then D is HIGH
  - K_2: if T is LOW then D is LOW

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής

- Δίνονται επίσης τα **ασαφή** σύνολα HIGH και LOW για τα μεγέθη T και D:
  - T_{LOW} = { 0.2/37, 1/37.5, 0.5/38, 0.2/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 }
  - T_{HIGH} = { 0/37, 0/37.5, 0.2/38, 0.5/38.5, 0.8/39, 1/39.5, 1/40 }
  - D_{LOW} = { 1/0, 0.8/2, 0.5/5, 0.2/8, 0/10 }
  - D_{HIGH} = { 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.8/8, 1/10 }

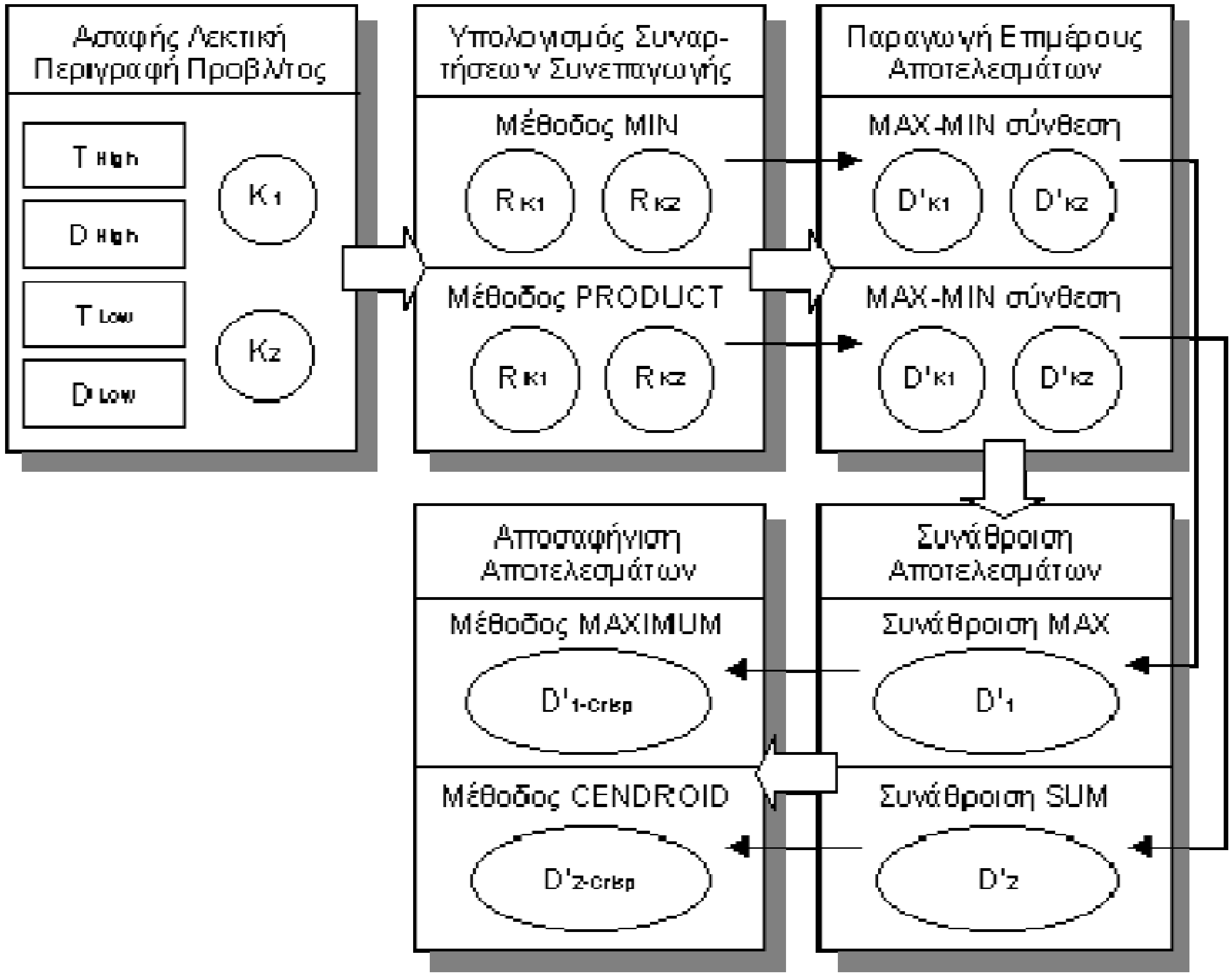
Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής





- Αν T'=38.5, να υπολογιστεί η τιμή του D' με συλλογιστική διαδικασία GMP.

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής



Βήμα Α1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

- Μέθοδος MIN
- 2 κανόνες: δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2}.
  - Χρησιμοποιείται ο τελεστής συνεπαγωγής Mandani min (ή απλά MIN).
    - K_1: if T is HIGH then D is HIGH
    - K_2: if T is LOW then D is LOW
- Έστω ο K_1. Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

R_{K1}	D	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37.0	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38.0	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39.0	0.8	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	1	0	0.2	0.5	0.8	1

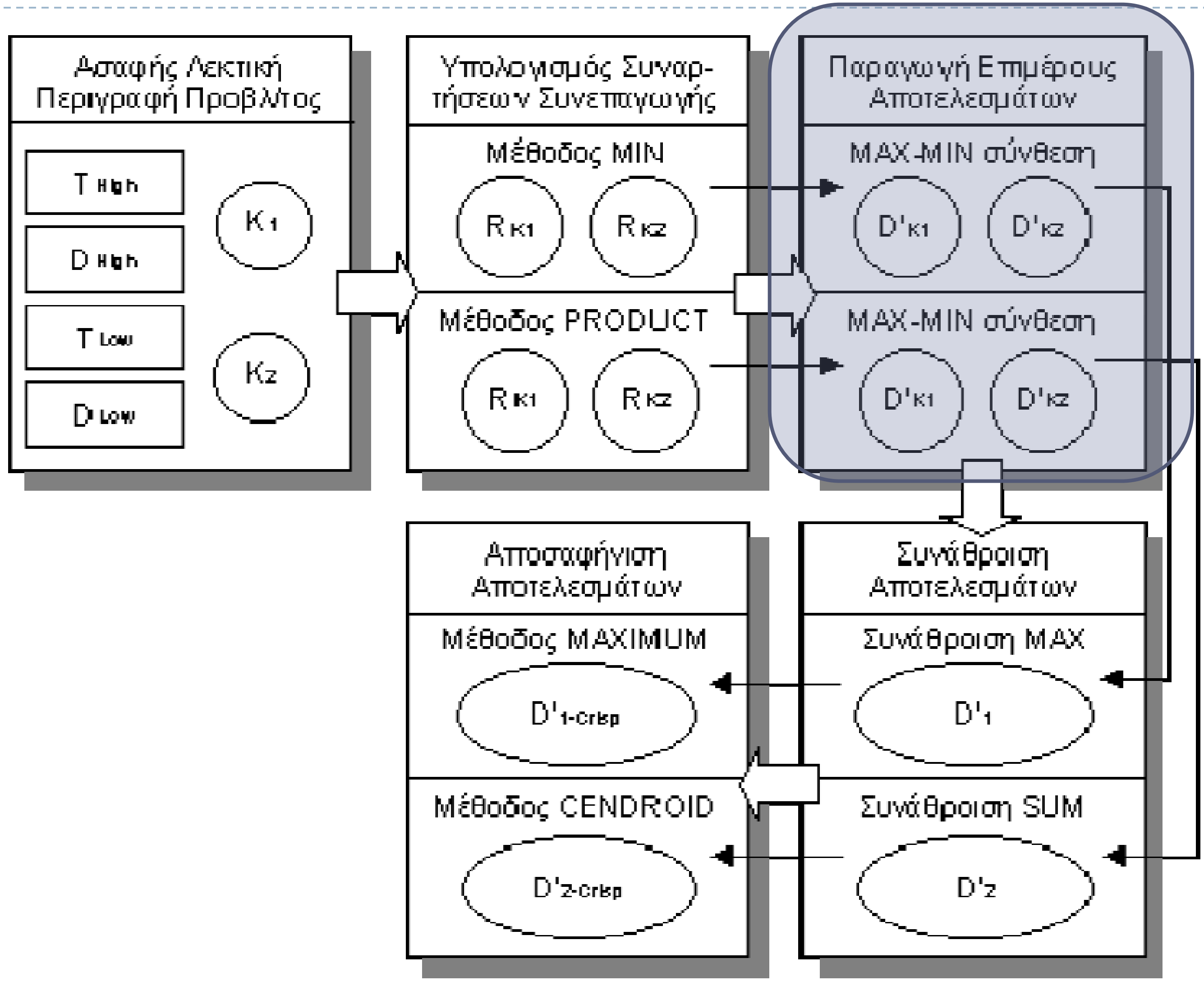
R_{K2}	D	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	0
37.0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0
38.5	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
39.0	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40.0	0	0	0	0	0	0

Βήμα Α1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

- Μέθοδος MIN
  - Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα περιέχει το $\min(u_{THIGH}, u_{DHIGH})$ για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται.
  - Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)

- <u>Σημείωση Γενίκευσης</u>: αν N εκφράσεις στο if τμήμα, τότε προκύπτει πίνακας N+1 διαστάσεων.

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής



Βήμα Α2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων

- Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
  - Κανόνας K_1: $D'_{K1}=T' o R_{K1}(T_{HIGH},D_{HIGH})$
  - Κανόνας K_2: $D'_{K2}=T' o R_{K2}(T_{LOW},D_{LOW})$
- Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας T'=38.5 **σε μορφή ασαφούς συνόλου**, δηλαδή:

  T' = 38.5 = { 0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 }
- Χρησιμοποιείται η ***μέθοδος σύνθεσης (ο) max-min*** *(η συνηθέστερη περίπτωση).*
- <u>Τεχνική όμοια με πολλαπλασιασμό πινάκων</u>: χρησιμοποιείται **min** αντί **πολλαπλασιασμού** και **max** αντί **πρόσθεσης**.
  - 1ος πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1x7) και 2ος ο αριστερά του βήματος Α1 (7x5)
  - Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}

Βήμα Α2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων

- Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}

$D'_{K1}=$ [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40] o

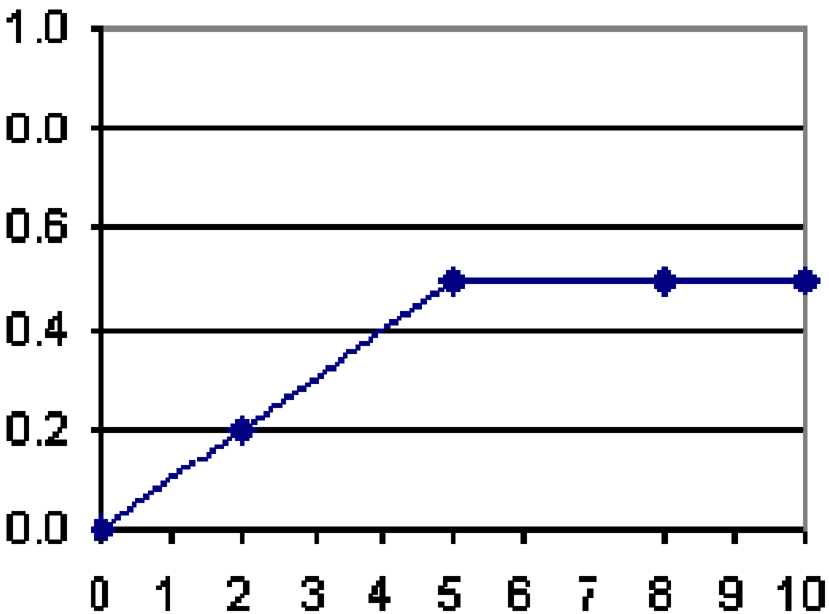
T \ D	0	2	5	8	10
37	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40	0	0.2	0.5	0.8	1

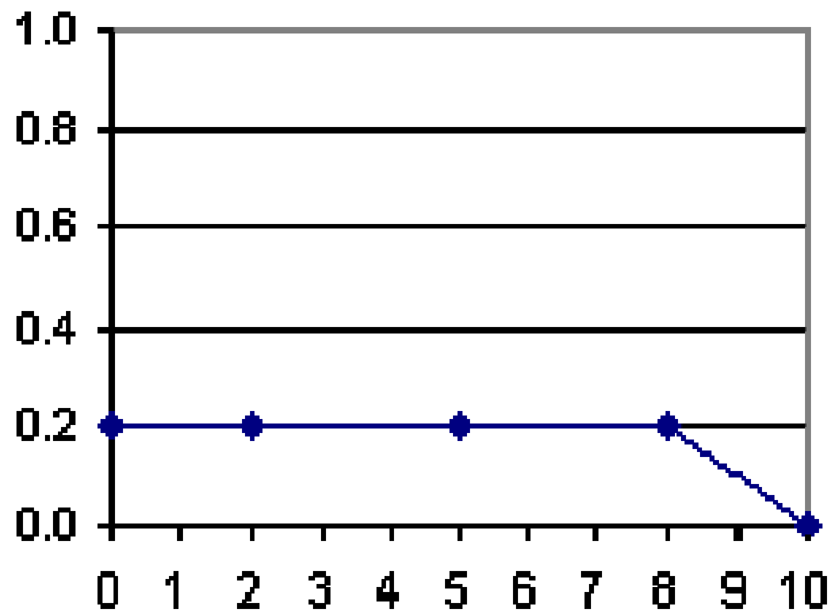
$\Rightarrow$

$D'_{K1} = \{ \quad 0/0,\ 0.2/2,\ 0.5/5,\ 0.5/8,\ 0.5/10 \ \}$

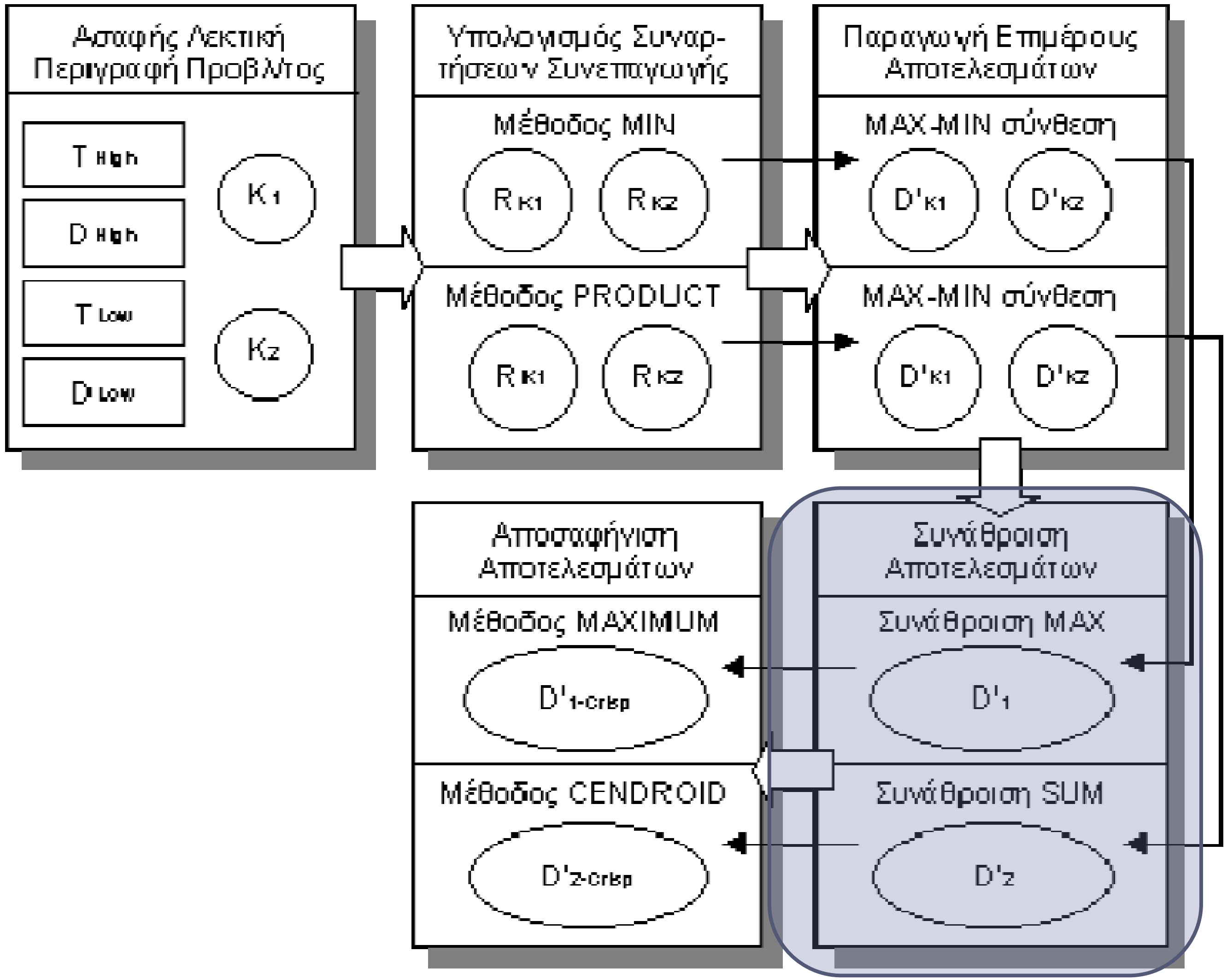
Βήμα Α2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων

- Όμοια, ο κανόνας K_2 δίνει: D'_{K2} = { 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 }
- D'_{K1} (αριστερά) και D'_{K2} (δεξιά).



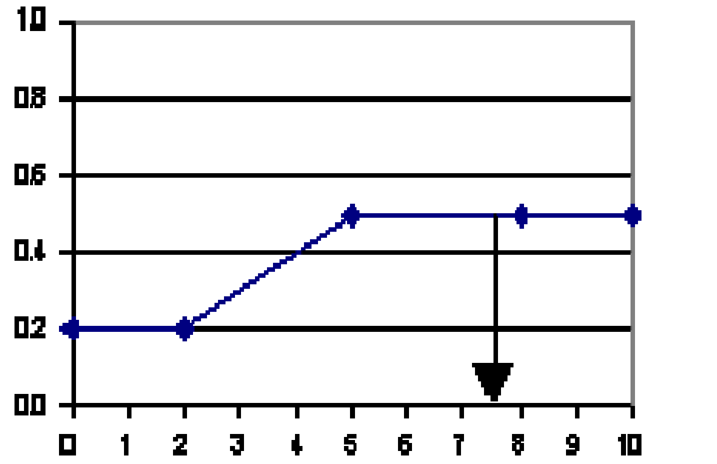


Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής



Βήμα Α3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

- Μέθοδος **MAX**
- Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας τη μέγιστη τιμή συγγένειας από τις παραμέτρους εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (**pointwise maximum - max$_{p/w}$**).

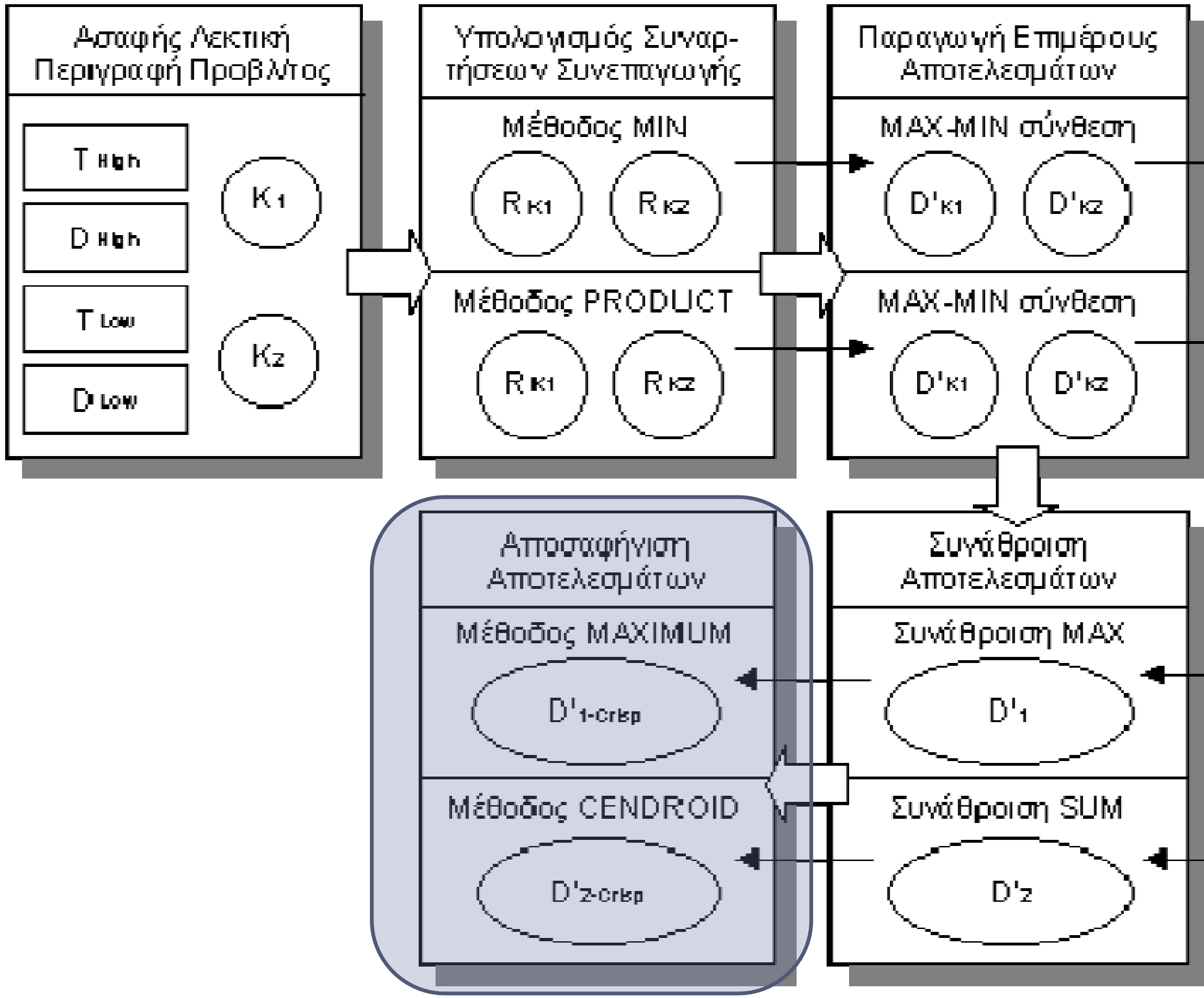


- Δεδομένου ότι έχουμε υπολογίσει τα:
  - $D_{1'K1}$ = { 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 }
  - $D_{1'K2}$ = { 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 }
- **η συνάθροισή τους κατά MAX δίνει:**

D_1'= {max(0,0.2)/0, max(0.2,0.2)/2, max(0.5,0.2)/5, max(0.5,0.2)/8, max(0.5,0)/10}

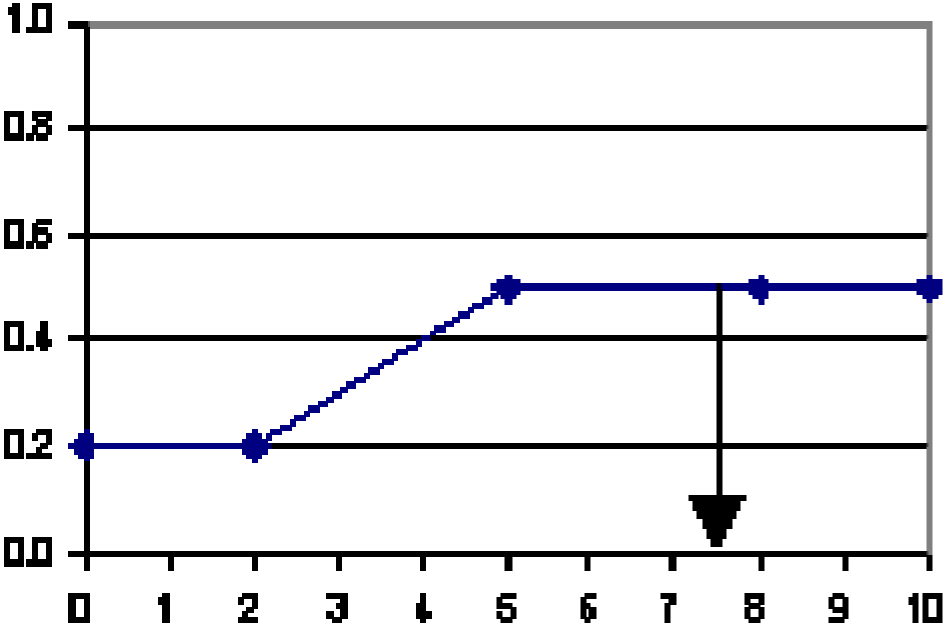
= { 0.2/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 }

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής



Βήμα Α4: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος αποσαφήνισης MAXIMUM
  - διακριτή τιμή: μέγιστη τιμή συγγένειας του τελικού αποτελέσματος.
  - με **average-of-maxima αποσαφήνιση**: **D_1**= (5+8+10)/3=**7.7**



Βήμα Β1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

- Μέθοδος PRODUCT
- 2 κανόνες: 2 τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2}.
- Έστω ο τελεστής συνεπαγωγής Larsen Product (ή απλά PRODUCT).
  - K_1: if T is HIGH then D is HIGH
  - K_2: if T is LOW then D is LOW
- Κανόνας K_1. Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

Βήμα Β1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

- K_1: if T is HIGH then D is HIGH
- K_2: if T is LOW then D is LOW

- Κανόνας K_1. Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

R_{K1}	D	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38	0.2	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39	0.8	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K2}	D	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	0
37	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38	0.5	0.5	0.4	0.25	0.1	0
38.5	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
39	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0

- Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα (σχέση συνεπαγωγής R_{K1}) περιέχει το ($u_{THIGH} \bullet u_{DHIGH}$) για τα T και D της γραμμής & στήλης στην οποία βρίσκεται.
- Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)

Βήμα Β2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων

- Με εφαρμογή της **συλλογιστικής διαδικασίας GMP**:
  - Κανόνας K_1: $D'_{K1}=T' o R_{K1}(T_{HIGH},D_{HIGH})$
  - Κανόνας K_2: $D'_{K2}=T' o R_{K2}(T_{LOW},D_{LOW})$
- Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας T'=38.5 σε μορφή ασαφούς συνόλου:

  T' = 38.5 = { 0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 }
- Χρησιμοποιείται η **μέθοδος σύνθεσης (ο) max-min** (η συνηθέστερη περίπτωση).
  - 1ος πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1x7) και 2ος ο εσωτερικός του βήματος B1 (7x5)
  - Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}.

Βήμα Β2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων

- Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}.

$D'_{K1}=$ [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40] o

T \ D	0	2	5	8	10
37	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40	0	0.2	0.5	0.8	1

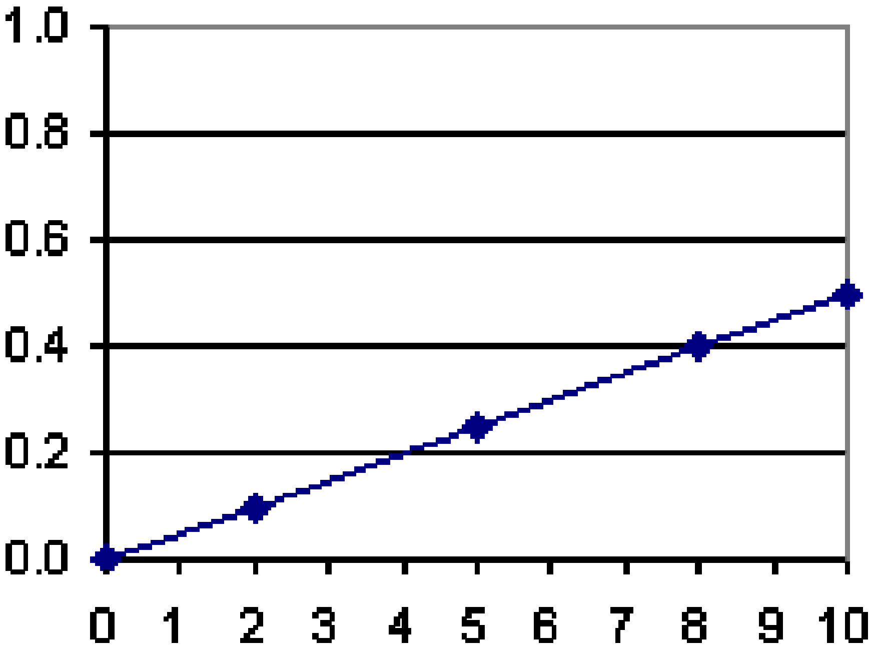
$\Rightarrow$

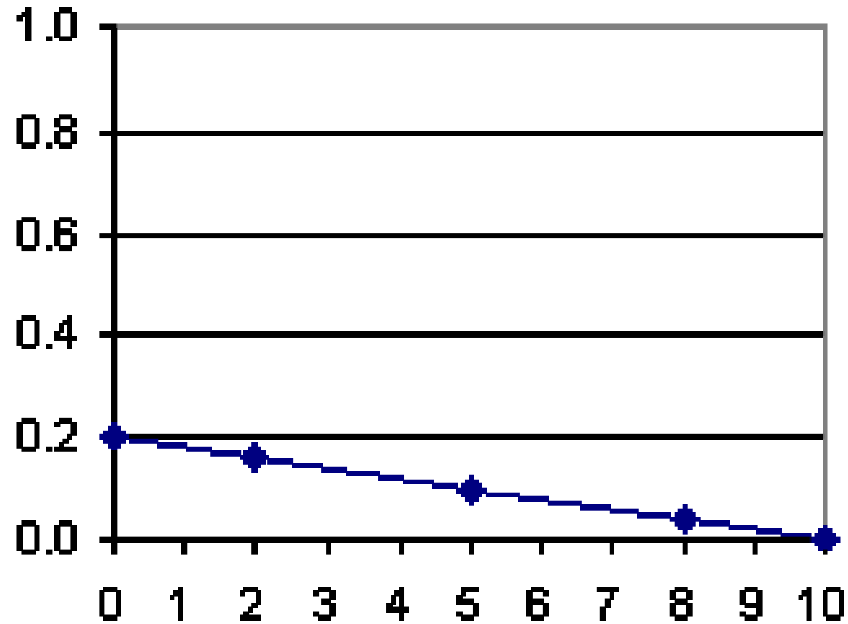
$D'_{K1} = \{ \; 0/0, \; 0.1/2, 0.25/5, \; 0.4/8, 0.5/10 \}$

Βήμα Β2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων

- Όμοια προκύπτει ότι ο κανόνας K_2 δίνει:

  $D'_{K2} = \{ 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 \}$
- Γραφική απεικόνιση των D'_{K1} (αριστερά) και D'_{K2} (δεξιά).



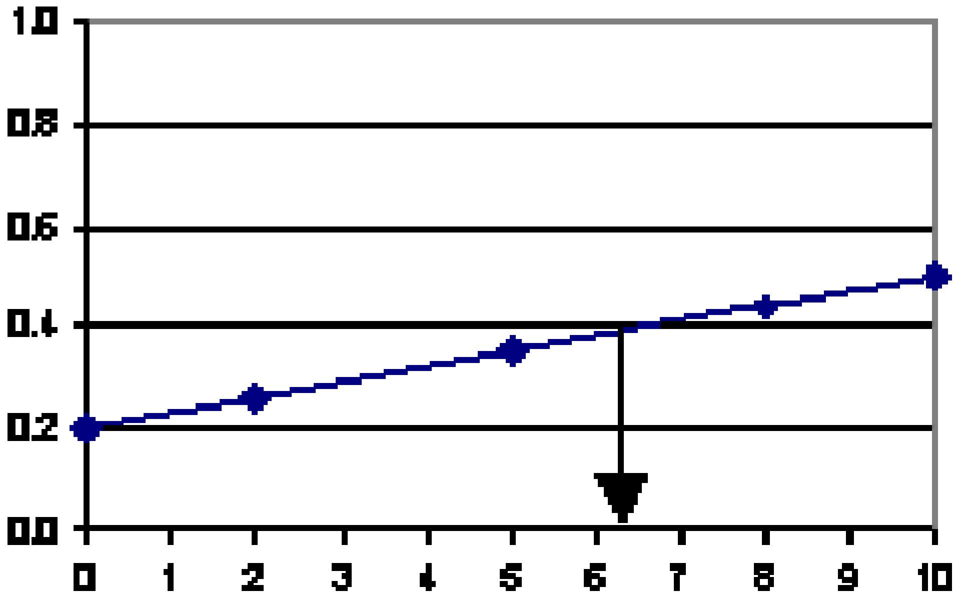


Βήμα Β3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

- Μέθοδος **SUM**
- Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας το άθροισμα των τιμών συγγένειας των παραμέτρων εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (**pointwise sum - sum$_{p/w}$**).
- Δεδομένου ότι έχουμε υπολογίσει:
  - $D_2{}'_{K1}$ = { 0/0, 0.1/2, 0.25/5, 0.4/8, 0.5/10 }
  - $D_2{}'_{K2}$ = { 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 }
- **...η συνάθροισή τους κατά MAX δίνει:**
  - D_2‘ = { (0+0.2)/0, (0.1+0.16)/2, (0.25+0.1)/5, (0.4+0.04)/8, (0.5+0)/10}
    = { 0.2/0, 0.26/2, 0.35/5, 0.44/8, 0.5/10 }

Βήμα B3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

- Μέθοδος SUM



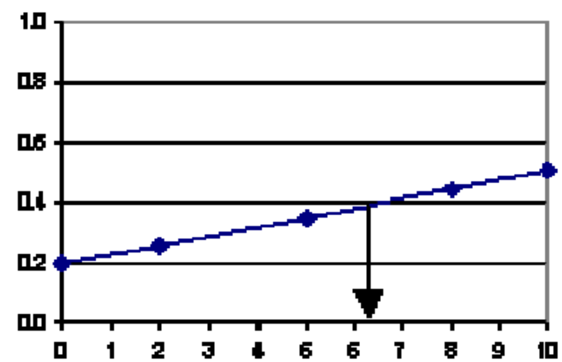
D_2‘ = { (0+0.2)/0, (0.1+0.16)/2, (0.25+0.1)/5, (0.4+0.04)/8, (0.5+0)/10}
= { 0.2/0, 0.26/2, 0.35/5, 0.44/8, 0.5/10 }

Βήμα Β4: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος **αποσαφήνισης CENDROID**
- Η διακριτή τιμή είναι αυτή που προκύπτει από **το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συγγένειας για την ασαφή παράμετρο εξόδου**.
- Το κέντρο βάρους επιφάνειας που ορίζεται από μία συνάρτηση f(t): σχέση (1)

$$(1)\quad t_{\kappa\beta} = \frac{\int_{t1}^{t2} t \cdot f(t)dt}{\int_{t2}^{t1} f(t)dt}$$

$$(2)\quad t_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i \cdot u_{OUT}(t_i)}{\sum_{i=1}^{N} u_{OUT}(t_i)}$$

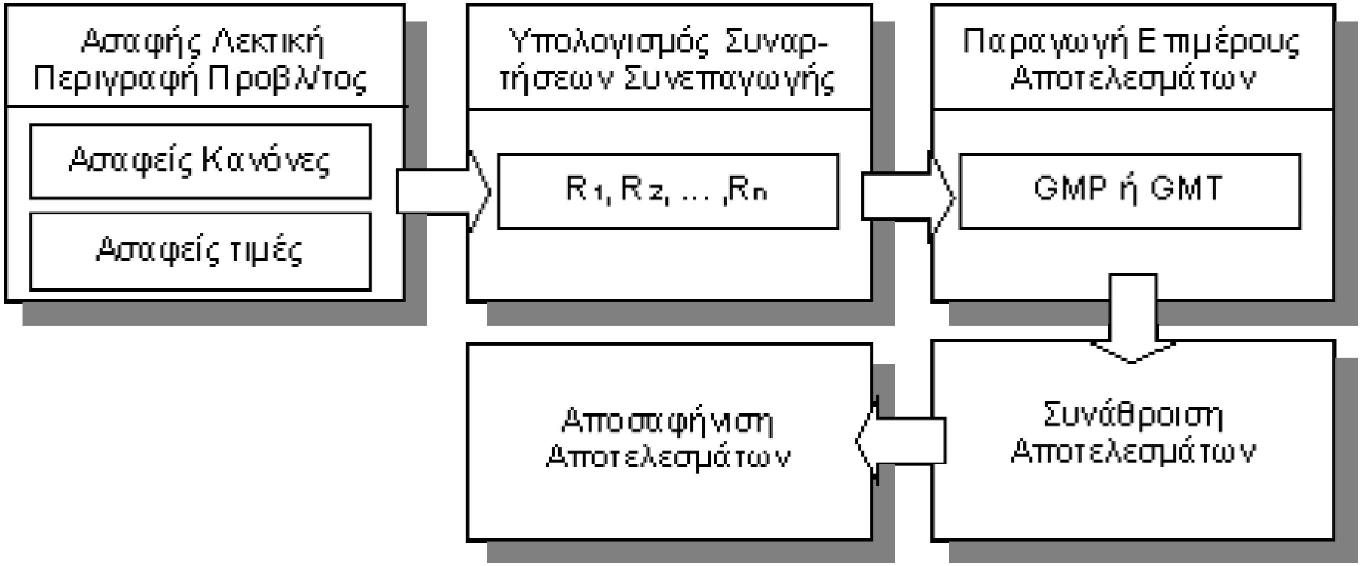


Βήμα Β4: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος **αποσαφήνισης CENDROID**
- Για διακριτού συνόλου αναφοράς: διακριτό άθροισμα με δειγματοληψία Ν σημείων (σχ.2).
- Με CENDROID αποσαφήνιση στα αποτελέσματα της συνάθροισης SUM, προκύπτει:

$$t_{D2'} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i \cdot u_{D2'}(t_i)}{\sum_{i=1}^{5} u_{D2'}(t_i)} = \frac{0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.26 + 5 \cdot 0.35 + 8 \cdot 0.44 + 10 \cdot 0.5}{0.2 + 0.26 + 0.35 + 0.44 + 0.5} = 6.2$$

Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής



- <u>Δυσκολότερο σημείο</u>: επιλογή ασαφών μεταβλητών, των τιμών τους και **των κανόνων με τους οποίους θα συνδυαστούν**.
- Συναρτήσεις συγγένειας: χρήση νευρωνικών δικτύων.
- <u>Σημεία προσοχής</u>: α) **επιλογή τελεστή συνεπαγωγής**,
β) **μεθόδου αποσαφήνισης**.

Σταθερότητα/Ποιότητα Ασαφούς Συστήματος

- Σταθερότητα: η ικανότητα να εμφανίζει **καλή συμπεριφορά σε όλο το φάσμα τιμών εισόδου**.

- Η μορφή του τελικού αποτελέσματος πολλές φορές δίνει μία καλή ένδειξη για την ποιότητα του συνολικού συστήματος.

Συμπεράσματα Ασαφούς Λογικής

- Η ασαφής λογική παρέχει μια διαφορετική προσέγγιση σε **προβλήματα ελέγχου** (control) και **ταξινόμησης (classification):**
  - δίνει έμφαση στο τι πρέπει να κάνει ένα σύστημα
  - δεν προσπαθεί να μοντελοποιήσει (π.χ. με μαθηματικά) τον τρόπο λειτουργίας του.
- **Απαιτεί εξειδικευμένη γνώση για τη διατύπωση των κανόνων, τον ορισμό των ασαφών συνόλων, τον συνδυασμό και την αποσαφήνιση.**
- Η ασαφής λογική μπορεί να αποβεί **χρήσιμη** σε περιπτώσεις που:
  - δεν υπάρχει μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος ή/και
  - εμπλέκονται υψηλά μη-γραμμικές διαδικασίες ή/και
  - υπάρχει διαθέσιμη εμπειρική γνώση λειτουργίας του συστήματος
- Η ασαφής λογική **δεν ενδείκνυται** στις περιπτώσεις που:
  - οι συμβατικές προσεγγίσεις δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα,
  - υπάρχει μαθηματικό μοντέλο του συστήματος
  - το πρόβλημα δεν λύνεται

Εφαρμογές Ασαφούς Λογικής

- 1974, University of London, UK
  - πειραματικός fuzzy controller για **ατμομηχανή** (η πρώτη -πειραματική- εφαρμογή)
- 1980, FL Smith & Co, Denmark
  - έλεγχος περιστρεφόμενου **κλίβανου τσιμεντοβιομηχανίας** (cement kiln control)
  - είναι η **πρώτη βιομηχανική εφαρμογή!**
- 1983, Fuji Electric, Japan
  - **έλεγχος προσθήκης χημικών** σε διαδικασίες καθαρισμού νερού
- 1987, Omron Corp., Japan
  - ο πρώτος fuzzy controller σε **«τσιπάκι»**
- 1987, το **μετρό** στην πόλη Sendai στην Ιαπωνία
  - fuzzy έλεγχος στην επιτάχυνση και επιβράδυνση για όσο το δυνατό γρηγορότερη κίνηση χωρίς όμως να καταπονούνται οι επιβάτες

Εφαρμογές Ασαφούς Λογικής

- Σύστημα Linkman (**βιομηχανίες τσιμέντου**).
- Υπόγειος **σιδηρόδρομος** Sendai στην Ιαπωνία.
- **Τραίνα** που "γέρνουν" στις στροφές για άνεση επιβατών (Ιταλία) (περιορισμό φυγόκεντρου δύναμης)
- **Φωτογραφικές μηχανές** (fuzzy εστίαση/focus).
- **Πλυντήρια ρούχων** με ένα "ευέλικτο" πρόγραμμα πλύσης (Hitachi).
- Συσκευές v**ideo-camera** (fuzzy εστίαση/focus και σταθεροποίηση - Canon).
- **Συστήματα πέδησης** χωρίς μπλοκάρισμα των τροχών (**fuzzy ABS**).
- Συστήματα ελέγχου λαβής σε **ρομποτικούς βραχίονες**.
- Συσκευές **κλιματισμού** (Hitachi), **κλιματισμός Διαστημικού Λεωφορείου.**
- Μηχανισμοί πλήρωσης σε **υδατοδεξαμενές** (έλεγχος αντλίας).
- Έμπειρα συστήματα με ασαφείς κανόνες.
- **Neuro-fuzzy συστήματα διάγνωσης** (ιατρικής ή τεχνικής) όπου οι συναρτήσεις συγγένειας έχουν υπολογιστεί με νευρωνικά δίκτυα ώστε να ικανοποιούν δεδομένα παρατήρησης (**π.χ. δεδομένα ιατρικών εξετάσεων ή πειραμάτων)**.

Πλεονεκτήματα χρήσης Ασαφούς Λογικής

- Είναι **εύκολη στην κατανόηση**.
  - Τα "μαθηματικά της είναι σχετικά απλά.
- Είναι **ευέλικτη**.
  - Σε υπάρχον σύστημα, μπορούμε να προσθέσουμε εύκολα επιπλέον λειτουργικότητα χωρίς να ξαναρχίσουμε από το μηδέν.
- Έχει **καλές ανοχές** σε μη ακριβή δεδομένα.
  - Πλεονέκτημα γιατί οι ανακρίβειες στα δεδομένα είναι πολύ συχνές.
- Μπορεί να **μοντελοποιήσει μη γραμμικές εξισώσεις** οποιασδήποτε πολυπλοκότητας.
  - Μπορούμε να φτιάξουμε ένα ασαφές σύστημα για κάθε input-output dataset.
- Μπορεί να βασιστεί σε **υπάρχουσα** (εμπειρική ή μη) **γνώση** ειδικών.
  - ...σε αντίθεση π.χ. με τα νευρωνικά δίκτυα
- Μπορεί να συνδυαστεί με **συμβατικές τεχνικές ελέγχου**.
  - ...συμπληρώνοντάς τες και απλοποιώντας τες.
- Απλή στη χρήση γιατί βασίζεται σε ποιοτικές περιγραφές και σε **δομές φυσικής γλώσσας**, που χρησιμοποιούμε καθημερινά.

Ερωτήσεις - Απορίες